



Miejsca geometryczne

1. O podłogę i prostopadłą do niej ścianę stoi oparta drabina. Nóżki drabiny przesuwają się po podłodze (bez poślizgu) prostopadle do ściany i drabina obsuwa się. Na środku drabiny siedzi kotek (którego traktujemy jako punkt). Udowodnić, że w miarę opadania drabiny kotek zakreśli w przestrzeni łuk okręgu.
2. *Miejsce geometryczne* – w geometrii zbiór punktów spełniających zadany warunek, np. pewna kula może być zdefiniowana jako miejsce geometryczne punktów odległych nie bardziej niż o r od środka układu współrzędnych.
3. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B . Udowodnić, że miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny równoodległych od A, B jest prosta prostopadła do odcinka AB i przechodząca przez jego środek.
4. W przestrzeni dane są punkty A, B . Udowodnić, że miejscem geometrycznym punktów przestrzeni trójwymiarowej równoodległych od A, B jest płaszczyzna prostopadła do odcinka AB i przechodząca przez jego środek.
5. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC . Udowodnić, że zbiorem punktów równoodległych od prostych AC i BC jest para prostych prostopadłych, przecinających się w C . Jak jest w przypadku przestrzennym?
6. *Okrąg Apoloniusza* Na płaszczyźnie dane są różne punkty A, B oraz liczba dodatnia k . Udowodnić, że zbiór punktów X płaszczyzny, spełniających

$$\frac{AX}{BX} = k$$

jest

- okręgiem, jeżeli $k \neq 1$,
 - symetralną AB , jeżeli $k = 1$.
7. Niech o będzie okręgiem Apoloniusza dla danych $A, B, k \neq 1$ przy czym punkt A leży na zewnątrz o . Z punktu A poprowadzono styczne AP, AQ do okręgu o . Udowodnić, że B jest środkiem odcinka PQ .
 8. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC$$

Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD . Udowodnić, że $\angle PCB = \angle ACD$.

9. * Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym AB i CD nie są równoległe. Niech \mathcal{X} będzie zbiorem punktów X takich, że $[XAB] + [XCD] = \frac{1}{2}[ABCD]$, gdzie $[Y]$ oznacza pole figury Y . Znaleźć \mathcal{X} .