

Przygotowanie do OMa 3.

1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC mają punkt wspólny. Udowodnić, że w $ABCD$ można wpisać okrąg.
2. Udowodnić, że jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, $m, n \in \mathbb{Z}_+$ i $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$, to $p|m$. Wskazówka na dole.
3. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Na jego bokach, po zewnętrznej stronie dobudowano trójkąty równoboczne BCD , CAE , ABF . Udowodnić, że proste AD , BE , CF przecinają się w jednym punkcie.
4. Rozstrzygnąć, czy istnieją 2 takie różne liczby 2^k , 2^l ($k, l \in \mathbb{Z}_+$), że mają one tyle samo cyfr oraz jedna powstaje z drugiej przez permutowanie cyfr.
5. Powodzenia!

Wskazówki

Wskazówka do 1.: Dirichlet.

Wskazówka do 2.: Kiedy w czworokąt można wpisać okrąg?

Wskazówka do 3.: Co jeszcze przechodzi przez ten punkt?

Wskazówka do 4.: Co się nie zmienia przy permutowaniu?