Zadania do samodzielnego rozwiązania spod hasła "Kombinować każdy może..."

1. Kombinatoryki jeszcze w tym roku nie było, najwyżej tyle co na obozie, ale do tych zadań nie potrzebna jest teoria (może oprócz najprostszej - Dirichleta, który był i prostych kolorowań, które były na obozie), bardziej tytułowa umiejętność kombinowania.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, takie, że $2p+1$ i $4p+1$ są również pierwsze.
Rozwiązanie: Rozważmy reszty z dzielenia przez 3. Jeżeli $p \equiv 0(\mod 3)$, to oczywiście $p = 3$. Wtedy też $2p+1 = 7$ i $4p+1 = 13$ są pierwsze, więc mamy jedno rozwiązanie. Gdy $p \equiv 1(\mod 3)$, to $3|2p+1$, więc, skoro jest to liczba pierwsza, to musi być $2p+1 = 3$, $p = 1$ - sprzeczność. Jeżeli $p \equiv 2(\mod 3)$, to $3|4p+1$, więc $4p+1 = 3$, czyli $p < 1$, sprzeczność. Ostatecznie tylko liczba 3 spełnia warunki zadania.
Inny sposób: $p = 2$ nie spełnia warunków zadania - $4p+1$ nie jest pierwsza, dalej zakładamy, że $p \geq 3$. Zauważmy, że jedna z liczb $4p, 4p+1, 2(2p+1) = 4p+2$ musi być podzielna przez 3, bo są to 3 kolejne liczby całkowite. To implikuje, że któraś z liczb $p, 2p+1, 4p+1$ musi być podzielna przez 3, a skoro są one pierwsze, to któraś musi być równa 3. Mamy $p \geq 3$, stąd $2p+1 > 3, 4p+1 > 3$, więc $p = 3$. Liczba 3 spełnia warunki zadania.

3. Mamy prostokątną szachownicę $N \times M$, z wyciętym polem (a, b) (lewy dolny róg ma współrzędne $(1, 1)$, a lewy górny $(1, M)$). Udowodnić, że jeśli szachownicę tę (bez pola (a, b)) da się pokryć prostokątami 1×2, stawianymi poziomo lub pionowo, to $2|a+b$.
Rozwiązanie: Zauważmy, że jeżeli szachownicę sa się pokryć prostokątami, to musi być $2|NM-1$, stąd N, M - nieparzyste, $N = 2n+1$, $M = 2m+1$ ($n, m \in \mathbb{Z}$, $n, m \geq 0$). Pokolorujmy pola (x, y) szachownicy, które spełniają warunek $2|x+y$ na czarno. Każdy prostokąt zajmuje jedno pole białe i jedno czarne, skoro da się pokryć prostokątami, to pól białych i czarnych jest tyle samo.
Zauważmy, że wszystkie rogi są czarne. Pól czarnych jest $n \cdot M + m + 1$ (liczymy po 2 kolumny i ostatnia zostaje), a białych $n \cdot M + m$, czyli o jedno mniej. Stąd pole czarne musiało być na początku usunięte, aby pokrycie było możliwe.
Co ciekawe, odwrotne twierdzenie jest również prawdziwe: Da się pokazać (konstruując śmieszną spiralkę), że jeżeli tablica $N \times M$, gdzie N, M - nieparzyste ma wycięte pole (a, b), takie, że $2|a+b$, to da się ją pokryć prostokątami 1×2 (stawianymi pionowo lub poziomo).

4. Dane są liczby $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ i $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$, wśród których każda z liczb $1, 2, 3, \cdots, 2n$ występuje dokładnie raz. Udowodnić, że $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2$. Wskazówka: przeanalizować dużo małych przypadków.
Rozwiązanie: Zauważmy, że każda liczba większa niż n jest w parze w wyrażeniu z zadania z liczbą niewiększą niż n. Faktycznie załóżmy, że w (b_n) jest k liczb większych od n, te liczby to oczywiście $b_1, b_2, \cdots, b_k$, bo (b_n) jest posortowany. Wtedy oczywiście w (a_n) jest $n-k$ liczb większych od n i są to liczby $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_{k+1}$. Widać, że w żadnej parze nie ma 2 liczb większych od n.
Z powyższego rozumowania wnosimy, że w każdej parze jest 1 liczba większa od n i jedna niewiększa od n. Ponieważ każda liczba większa od n jest większa od każdej liczby niewiększej od n, to w $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$ liczby większe od n są brane z plusem, a niewiększe z minusem (bo jeżeli $a > b$, to $|a - b| = a - b$), więc $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = 2n + (2n-1) + \cdots + (n+1) - n - (n-1) - \cdots - 1 = (2n-n) + ((2n-1)-(n-1)) + \cdots + ((n+1)-1) = n + n + \cdots + n = n \cdot n = n^2$.

5. Te zadanka nie są zbyt proste, ani trudne, biorąc pod uwagę, że na rozwiązanie jest tydzień. W miarę możliwości poziom następnych serii (o ile będą), będzie wyrównywany do poziomu rozwiązujących.