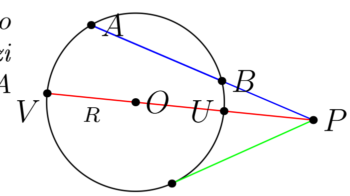
Potęga punktu

1.1 Teoria

Twierdzenie 1.1 (o siecznych, o stycznej) *Dany jest okrąg o o środku O i promieniu R oraz punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i przecina okrąg o w (niekoniecznie różnych) punktach A i B, to iloczyn $|PA| \cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a dokładniej*

$$|PA| \cdot |PB| = \left||PO|^2 - R^2\right|.$$



Definicja 1.2 (potęga punktu) *Przy powyższych oznaczeniach liczbę (być może ujemną!) $|PO|^2 - R^2$ nazywamy* ***potęgą punktu*** *P względem o i oznaczamy $p(P, o)$.*

Wniosek 1.3

1. *$p(P, o) < 0$ gdy P leży we wnętrzu koła o brzegu o, $p(P, o) = 0$ gdy P leży na o oraz $p(P, o) > 0$, gdy P leży poza o.*

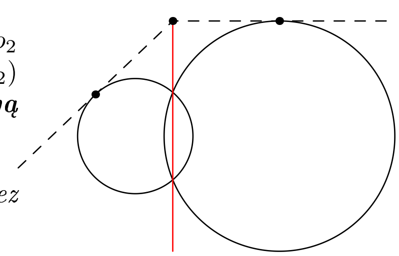
2. *przy oznaczeniach twierdzenia (nadal dla dowolnej prostej) mamy*

$$\begin{array}{ll} p(P, o) = -|PA| \cdot |PB| & \text{gdy } P \text{ leży wewnątrz } o \\ p(P, o) = |PA| \cdot |PB| & \text{inaczej} \end{array}$$

3. *Jeżeli P leży poza okręgiem o, to $p(P, o)$ jest kwadratem długości stycznej do o przechodzącej przez P.*

Twierdzenie 1.4 *Ustalmy dwa niewspółśrodkowe okręgi o_1, o_2 o środkach O_1, O_2. Zbiór punktów P takich, że $p(P, o_1) = p(P, o_2)$ jest* ***prostą prostopadłą*** *do O_1O_2; nazywamy ją* ***osią potęgową okręgów*** *o_1, o_2.*

Wniosek 1.5 *Jeżeli okręgi przecinają się, to prosta przechodzi przez punkty przecięcia.*



Twierdzenie 1.6 (Brianchona)** *Jeżeli w sześciokąt $ABCDEF$ da się wpisać okrąg to przekątne AD, BE, CF mają punkt wspólny.*

1.2 Zadania

1. Uzasadnij, że zbiór punktów mających potęgę względem danego okręgu o równą $p > 0$ jest okręgiem.

2. *Eliminacje do PTM – przypomnienie.*

   Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A, B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $\angle PXY = \angle PYX$.

3. **Twierdzenie 1.7 (Kryterium współokręgowości)** *Jeżeli punkty S, A, B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o początku w S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$.*

4. Uzasadnij, że teza poprzedniego twierdzenia zachodzi również, gdy S leży na odcinkach AB i CD.

5. Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MB \cdot ME = MC \cdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

6. Dane są okręgi o_1, o_2 oraz punkt P. Półproste k i l mają początek w P i przecinają: k okrąg o_1 w A, B, zaś l okrąg o_2 w C, D ($A \neq B$, $C \neq D$). Udowodnić, że na A, B, C, D da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy P leży na osi potęgowej o_1 i o_2.

7. Okręgi o_1, o_2 przecinają się w punktach K i L i są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach A, B odpowiednio, przy czym promień o jest większy od promieni o_1 i o_2. Prosta k jest styczna zewnętrznie do o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Proste AC i BD przecinają się w S. Wykazać, że K, L, S są współliniowe.

   Niedługo (ale nie teraz ;) udowodnimy, że (co najmniej w części przypadków) punkt S leży na o.

1.3 Oś potęgowa

1. Jeśli okręgi o_1, o_2, o_3 są takie, że $o_1 \cap o_2 = \{A, B\}$, $o_2 \cap o_3 = \{C, D\}$, $o_3 \cap o_1 = \{E, F\}$, to proste AB, CD, EF albo są wszystkie równoległe, albo przecinają się w jednym punkcie.

2. Uzasadnij, że wysokości w trójkącie ABC przecinają się w jednym punkcie.

   Rozważ okręgi o średnicach AB, BC, CA.

3. * W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ mamy równości odcinków: $FA = AB$, $BC = CD$, $DE = EF$. Udowodnić, że wysokości trójkątów ABC, CDE, EFA, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków B, D, F przecinają się w jednym punkcie. *Rozważ odp. okręgi.*

4. * Nieprostopadłe przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Wykazać, że prosta przechodząca przez ortocentra BCE i ADE jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki odcinków AB i CD.

   Wsk.: udowodnić, że ortocentra leżą na osi potęgowej okręgów, których średnicami są AB i CD.