Równość!

(czyli koniec nierówności)

1.1 Przypomnienie

1. **Twierdzenie (Średnie)** *Jeżeli liczby $a_1, a_2 \cdots, a_n$ są dodatnie, to*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

W dowolnej z nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Uwaga: jeżeli wyrażenia mają sens również gdy $a_1, \ldots, a_n$ są nieujemne (np. śr. arytmetyczna i geometryczna, ale nie harmoniczna) to również dla tego przypadku nierówności zachodzą.

2. **Twierdzenie (Średnie ważone)** *Jeżeli liczby $a_1, \ldots, a_n$ są dodatnie, zaś liczby $w_1, \ldots, w_n \in [0,1]$ sumują się do 1 to*

$$\frac{1}{\frac{w_1}{a_1} + \frac{w_2}{a_2} + \ldots + \frac{w_n}{a_n}} \leqslant a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{w_n} \leqslant w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n \leqslant \sqrt{w_1 a_1^2 + \ldots + w_n a_n^2}.$$

Dla każdej nierówności prawdą jest, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, w przypadku, gdy $w_i > 0$.

3. **Twierdzenie (Nierówność Schwarza)** *Jeżeli n jest liczbą całkowitą, a $u_1, u_2, \ldots, u_n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ są liczbami rzeczywistymi to*

$$(u_1^2 + \ldots + u_n^2)(t_1^2 + \ldots + t_n^2) \geqslant (u_1 t_1 + \ldots + u_n t_n)^2$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała C, że $u_i = C t_i$ dla wszystkich i.

4. **Twierdzenie (* Nierówność Ptolemeusza)** *Dla każdych czterech punktów na płaszczyźnie A, B, C, D zachodzi*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| \geqslant |AC| \cdot |BD|.$$

5. **Lemat (Taka sobie nierówność $\ddot\smile$)** *Jeśli liczby x, y, z są nieujemne to*

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leqslant xyz.$$

1.2 Zadania domowe

1. Niech ciąg liczb $a_0, a_1, \ldots, a_n$ będzie zdefiniowany przez

$$a_0 = 3, \quad (3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$$

Oblicz, w zależności od n, sumę $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$.

2. Niech x będzie liczbą rzeczywistą z przedziału $\left[\frac{3}{2}, 5\right]$. Udowodnij, że

$$2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} < 2\sqrt{19}.$$

Uwaga: dowody nierówności z większą stałą po prawej stronie mogą być ocenione na 2 pkt (ale nie muszą).

3. **Twierdzenie (Nierówność Schura)** *Niech x, y, z będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że dla każdej liczby dodatniej r zachodzi*

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$3abc + a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 2\left((ab)^{\frac{3}{2}} + (bc)^{\frac{3}{2}} + (ca)^{\frac{3}{2}}\right).$$

5. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c takich, że $abc = 1$ zachodzi

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$