Nierówności I

Joachim Jelisiejew

25 października 2011

1.1 Młodsi

Zadanie M1

Bez teorii. Liczby a, b są rzeczywiste, a liczby x, y — rzeczywiste dodatnie.

We wszystkich poniższych nierównościach zastąp $\gtreqless$ jednym ze znaków: $\geqslant, \leqslant$ po czym udowodnij otrzymaną nierówność.

1. $a^2 + b^2 \quad \gtreqless \quad 2ab$
2. $(a+b)^2 \quad \gtreqless \quad 4ab$
3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \gtreqless \quad \frac{4}{x+y}$
4. $\frac{2}{\sqrt{xy}} \quad \gtreqless \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
5. $2\sqrt{xy} \quad \gtreqless \quad x + y$
6. $2(x+1)(y+1) \quad \gtreqless \quad 2 + x(x+2) + y(y+2)$

Twierdzenie 1.1 (Nierówność pomiędzy średnimi, dla trzech liczb)**.** *Jeżeli $a, b, c > 0$ to zachodzi*

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

przy czym równość w krórejkolwiek z nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c$.

Warto wiedzieć, że analogiczne nierówności, z 3 zastąpionym w odpowiednich miejscach przez n, są również prawdziwe. Prawdziwe są też o wiele ogólniejsze nierówności zwane nierównościami pomiędzy średnimi potęgowymi.

Zadanie M2

Średnie. Liczby a, b, c są rzeczywiste dodatnie.

We wszystkich poniższych nierównościach zastąp $\gtreqless$ jednym ze znaków: $\geqslant, \leqslant$ po czym udowodnij otrzymaną nierówność.

1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \gtreqless \quad \frac{9}{a+b+c}$
2. $(a+b+c)^2 \quad \gtreqless \quad 3(a^2+b^2+c^2)$
3. $2ab + 2bc + 2ca \quad \gtreqless \quad 2(a^2+b^2+c^2)$
4. $(a+b+c)^2 \quad \gtreqless \quad 3(ab+bc+ca)$
5. $a^2+b^2+c^2+3 \quad \gtreqless \quad 2(a+b+c)$
6. $\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \quad \gtreqless \quad a+b+c$
7. $\left(a + \frac{b^2}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{a^2}{c}\right)^2 \quad \gtreqless \quad 4(a^2+b^2+c^2)$
8. $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \quad \gtreqless \quad 6abc$
9. $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \quad \gtreqless \quad 2(a^3+b^3+c^3)$
10. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \quad \gtreqless \quad a^3+b^3+c^3+6abc$

Zadanie M3

Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

$$\sqrt{\frac{3}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leqslant \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \text{ oraz } \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leqslant \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}.$$