Proserwy dzień 2.

Teoria:
1) zwijanie pod kwadrat (faktoryzacja)
2) średnie nierówności
3) indukcja (?)
4) jednomono (?)

Zadania:
ranek – olimpijska:
1) Udowodnij, że dla $a,b,c>0$ jest $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.
2) Rozstrzygnij, czy dla dowolnych $a,b>0$ jest $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab} \leq a+b$.
3) Rozstrzygnij, czy istnieje takie x, że $(ax)^2+\left(a+b\right)x+\frac{b}{a}<0$.
4) Udowodnij, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ dla n całkowitego i większego od 1.
5) Udowodnij, że dla $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ rzeczywistych zachodzi $\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$.
6) Udowodnij, że jeżeli $a,b,c>0$ i $a+b+c=2$, to $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \leq 2$.

ranek – średniozaawansowana:
1) Wykaż, że $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.
2) Udowodnij, że $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.
3) Rozstrzygnij, czy dla dowolnych $a,b,c \geq 0$ jest $a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geq 0$.

matma olimpijska:
1) Rozstrzygnąć, czy $x^3-4x\sqrt{x}+4 \geq 0$ dla $x \geq 0$ oraz dla jakich x zachodzi równość.
2) Pokazać, że $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c} \geq \frac{36}{a+b+c}$ dla $a,b,c>0$.
3) Udowodnić nierówność Schura: $\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right) \leq abc$.

wykład:
1) Rozgrzewka :) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leq \frac{a+b}{2}$.
2) Niech $a,b,c>0$ i $a+b+c=1$. Dowiedź: $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}$.
3) $a,b>0$ i $a^2+b^2=1$. Udowodnić, że $a^3+b^3 \geq ab\sqrt{2}$.
4) $a,b,c>0$ i $a^2+b^2+c^2=1$. Udowodnić, że $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq \sqrt{3}$.