Przedomowe kółko

kółko I LO Białystok

14.02.2014

Zadanie 1
Niech H będzie punktem przecięcia wysokości trójkąta nieprostokątnego ABC. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AHB, BHC i CHA są przystające.

Zadanie 2
Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

Zadanie 3
Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCD, CDA, DAB oraz ABC są wierzchołkami prostokąta.

Zadanie 4
Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 3$ oraz dwie liczby całkowite dodatnie a, b takie, że liczby $a+b$ oraz $a^{10}+b^{10}$ dzielą się przez p. Udowodnić, że a i b dzielą się przez p.

Zadanie 5
Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4abc.$$

Zadanie 6
Na turnieju rycerskim każdy uczestnik posiada wśród pozostałych co najwyżej trzech śmiertelnych wrogów. Udowodnij, że można podzielić uczestników turnieju na dwie grupy tak, by dowolny uczestnik posiadał w swojej grupie co najwyżej jednego śmiertelnego wroga.

Uwaga: Jeżeli rycerz A jest śmiertelnym wrogiem rycerza B, to rycerz B jest śmiertelnym wrogiem rycerza A.

Zadanie 7
Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{b+c+d} \geqslant \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

Zadanie 8
Wykazać, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta ostrokątnego to zachodzą nierówności

1. $a^2 < b^2 + c^2$,
2. $(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + a^2 - b^2) \leqslant (a + b - c)^2(c + a - b)^2$.

Wskazówki

Wskazówka 1

Niech $\alpha := \sphericalangle BAC$, wtedy kąt $\sphericalangle BHC = 180^\circ - \alpha$. Niech H' będzie odbiciem symetrycznym H względem BC, wtedy H' leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$, więc okręgi opisane na $\triangle ABC$ i $\triangle BCH$ są symetryczne względem BC, w szczególności mają równe promienie.

Wskazówka 2

Pole trójkąta ADE to połowa pola każdego z równoległoboków $ABCD$ i $AEKL$.

Wskazówka 3

Niech I_1 oraz I_2 oznacza odpowiednio środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ oraz $\triangle BCD$. Niech E będzie drugim punktem przecięcia prostej AI_1 z okręgiem opisanym na $ABCD$. Wtedy $EB = EI_1 = EC$ na mocy „lemaciku". Punkt E jest też drugim punktem przecięcia prostej DI_2 z okręgiem opisanym na $ABCD$, więc również $EI_2 = EB = EC$. Wobec tego punkty B, I_1, I_2, C leżą na jednym okręgu i $\sphericalangle CI_2I_1 = 180^\circ - \sphericalangle I_1BC$. Podobnie $\sphericalangle CI_2I_3 = 180^\circ - \sphericalangle I_3DC$, gdzie I_3 jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD. Stąd $\sphericalangle I_1I_2I_3 = 90^\circ$.

Wskazówka 4

Mamy $a \equiv -b \mod p$ i $a^{10} \equiv -b^{10} \mod p$, więc $2a^{10} \equiv 0 \mod p$.

Wskazówka 5

Niech k będzie największą taką liczbą, że $2^k \mid a$, $2^k \mid b$, $2^k \mid c$ i niech $a = 2^k a'$, $b = 2^k b'$, $c = 2^k c'$. Wtedy

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 4 \cdot 2^k \cdot a'b'c'.$$

Kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez 4, zaś kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Z definicji liczby k, co najmniej jedna z liczb a', b', c' jest nieparzysta. Wobec tego reszta z dzielenia przez 4 lewej strony równania powyżej to $1 + 0 + 0 = 1$ lub $1 + 1 + 0 = 2$ lub $1 + 1 + 1 = 3$. W szczególności lewa strona jest niepodzielna przez 4, sprzeczność!

Wskazówka 6

Rozważmy wszystkie możliwe podziały rycerzy i wybierzmy ten podział $\mathcal{P}$, w którym liczba par śmiertelnych wrogów w jednej grupie jest minimalna. Załóżmy, że w tym podziale pewien rycerz A ma w swojej grupie co najmniej dwóch śmiertelnych wrogów. Rozważmy nowy podział $\mathcal{P}'$, w którym A przeniesiony jest do drugiej grupy. W tej grupie A ma co najwyżej jednego śmiertelnego wroga. Wobec tego przy podziale $\mathcal{P}'$ liczba par śmiertelnych wrogów w jednej grupie jest mniejsza niż przy podziale $\mathcal{P}$. Sprzeczność z definicją $\mathcal{P}$!

Wskazówka 7

Zastosujmy nierówność między średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb $a+b+c$, $d+a+b$, $c+d+a$, $b+c+d$:

$$\frac{4}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{b+c+d}} \leqslant \frac{(a+b+c) + (d+a+b) + (c+d+a) + (b+c+d)}{4}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna wyjściowej.

Wskazówka 8

1. Niech odpowiednio A, B, C będą wierzchołkami trójkąta leżącymi naprzeciw boków a, b, c. Niech H będzie rzutem B na bok(nie proste!) AC. Wtedy $BH < BA = c$ oraz $CH < AC = b$. Wobec tego $a^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2 < c^2 + b^2$.
2. Nierówność jest równoważna $2a^2(b-c)^2 \leqslant (b^2-c^2)^2 + (b-c)^4$. Używamy 1. i otrzymujemy nierówność $0 \leqslant (b-c)^2((b+c)^2 + (b-c)^2 - 2a^2) = 2(b-c)^2(b^2 + c^2 - a^2)$.