13. kółko - środek masy w geometrii

Teoria

1. Załóżmy, że mamy na płaszczyźnie układ U punktów $A_1, A_2, \cdots, A_n$ i wprowadzony układ współrzędnych. W każdym punkcie $A_i = (x_i, y_i)$ tego układu zawieszamy pewną masę $m(A_i)$ (być może ujemną). Możemy zdefiniować **środek masy** układu U jako punkt
$$M = (\frac{m(A_1)x_1 + m(A_2)x_2 + \cdots + m(A_n)x_n}{m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n)}, \frac{m(A_1)y_1 + m(A_2)y_2 + \cdots + m(A_n)y_n}{m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n)})$$
$$\text{z masą } m(M) = m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n)$$
(o ile suma mas nie wynosi 0).
Trochę prościej mówiąc, dla tych, którzy lubią wektory, środek masy jest zdefiniowany przez
$$\vec{OM} = \frac{m(A_1)\vec{OA}_1 + \cdots + m(A_n)\vec{OA}_n}{m(A_1) + \cdots + m(A_n)}$$
gdzie O to środek układu współrzędnych (otrzymamy ten sam środek masy dla dowolnego punktu). Prościej mówiąc będzie to „fizyczny” środek masy.

2. Przykłady:
   - Środkiem masy układu 2 punktów o wadze 1 w każdym punkcie jest środek odcinka łączącego te punkty.
   - Środkiem masy układu 2 punktów A, B, takich, że $m(A) = 1, m(B) = 2$ jest punkt leżący na $\frac{2}{3}$ odcinka AB, bliżej B.
   - Środkiem masy układu 2 różnych punktów A, B, takich, że $m(A) = 1, m(B) = -2$ jest punkt M, leżący na prostej AB, taki, że B jest środkiem odcinka AM.
   - Środka masy układu 2 różnych punktów A, B, takich, że $m(A) = 1, m(B) = -1$ nie można sensownie zdefiniować - w mianowniku dostajemy zero. Fizycznie takiego układu także nie da się zbalansować. Można przyjąć, że środek ten leży „w nieskończoności”.

3. Własności środka masy:
   (a) Nie zależy on od wyboru układu współrzędnych,
   (b) Jeżeli środkiem masy układu punktów A, B (z masami $m(A), m(B)$) jest punkt X, to środkiem masy układu A, B, C jest środek masy układu X, C, gdzie $m(X) = m(A) + m(B)$. Innymi słowy, aby obliczyć środek masy pewnego układy punktów możemy liczyć po kolei środki mas układów 2 punktów.
   (c) Jeżeli mamy 2 różne punkty A, B z masami $m(A), m(B)$, to środek M masy tych punktów, jeżeli istnieje, czyli gdy $m(A) + m(B) \neq 0$, leży na prostej AB, ponadto gdy masy są dodatnie, to leży on na odcinku AB i spełnia zależność $|MB|m(B) = |MA|m(A)$.
   (d) **Twierdzenie 0.1 (Twierdzenie o przegrupowywaniu mas)** *Środek masy systemu punktów nie zmieni się, jeżeli zastąpimy część punktów jednym punktem będącym środkiem masy zastąpionych punktów i mający masę równą sumie mas zastąpionych punktów (o ile środek masy zastapionych punktów istnieje).*

4. Zwykle używamy środka masy w zadaniach, gdzie jest dużo dziwnych punktów przecięcia, ale nie ma nic o kątach i nie ma okręgów. Zadania takie mają tezę np. udowodnij, że AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Wtedy tak dobieramy masy w pewnych punktach z zadania, żeby móc udowodnić, że środek masy leży na prostej AD, na prostej BE i na prostej CF (przez odp. przegrupowanie mas) i tym samym proste te przecinają się w jednym punkcie (w środku masy).

Zadania

1. Udowodnij, że w trójkącie $\triangle ABC$ środkowe przecinają się w jednym punkcie i że punkt ten pokrywa się ze środkiem masy układu 3 punktów A, B, C z wagami $m(A) = m(B) = m(C) = 1$.
Rozwiązanie:
Możemy przegrupować masy następująco: dwie wagi 1 umieszczone w A i B **zamieniamy** na wagę 2 umieszczoną w środku ciężkości układu A, B, czyli w środku M odcinka AB. Z twierdzenia o przegrupowywaniu mas, środek układu A, B, C leży tam, gdzie środek układu punktów D, C, czyli gdzieś na odcinku CD. Stąd środek masy leży na środkowej CD. Analogicznie możemy, zaczynając od wyjściowego układu, najpierw zaminić masy umieszczone w punktach A, C albo masy umieszczone w B, C, udowadniając, że środek ciężkości leży na wszystkich 3 środkowych, więc muszą się one przecinać w jednym punkcie.
Jako bonus udowodniliśmy też, że środkowe przecinają się w stosunku $2 : 1$.

2. Niech D, E, F oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ do boków BC, CA, AB odpowiednio. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie:
Wiemy, że dwie styczne do okręgu z danego punktu mają równe długości:
$$a = AE = AF, b = BF = BD, c = CE = CD$$
Chcemy rozmieścić tak masy, żeby środek ciężkości układu leżał na 3 prostych AD, BE, CF i tym samym proste te przecinały się w jednym punkcie. Sensowne wydaje się ustawienie mas tylko w A, B, C.
Żeby środek masy leżał na CF, to środek masy A, B musi być w F, więc musi być $m(A)a = m(B)b$. Analogicznie otrzymujemy równania $m(B)b = m(C)c$, $m(C)c = m(A)a$. Rozwiązaniem tego układu (zauważmy, że ma on ich wiele) jest np.:
$$m(A) = bc, m(B) = ac, m(C) = ab$$
Z obliczenia tych mas wynika, że środek tego układu leży na prostych AD, CE, BF, więc proste te przecinają się w jednym punkcie.
Zauważmy, że w rozwiązaniu nie musimy uzasadniać, dlaczego ustawiamy akurat takie masy. Wystarczy, że weźmiemy dowolne masy i pokażemy, że spełniają one żądane własności.

3. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Dobrać tak masy umieszczone w punktach A, B, C, żeby środek ciężkości tych trzech punktów wypadł w punkcie D.
Rozwiązanie:
Weźmy $m(A) = 1$ i $m(B) = m(C) = -1$. Wtedy środek masy B, C leży na przecięciu S przekątnych $ABCD$, więc możemy zamienić masy -1 w B, C na masę -2 w S. Środek masy punktów A, S z takimi wagami leży w D, co obliczamy z definicji.
Można było także wziąć $m(A) = -1$, $m(B) = m(C) = 1$.

4. Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem i niech K, L, M, N będą środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Udowodnij, że KM i LN połowią się, więc $KLMN$ jest równoległobokiem i że środek tego równoległoboku pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki przekątnych.
Rozwiązanie:
Umieśćmy masy $m(A) = m(B) = m(C) = m(D) = 1$.
Możemy masy 1 z A, B przegrupować do masy 2 w K, a masy C, D przegrupować do masy 2 w M, więc środek masy A, B, C, D leży na połowie KM.
Możemy masy z A, D przegrupować do N w masą 2, a masy z B, C przegrupować do L z masą 2, więc środek masy A, B, C, D leży na środku odcinka NL, a więc środki KM i LN pokrywają się i $KLMN$ jest równoległobokiem.
Możemy masy z A, C przegrupować do środka przekątnej AC, a masy z B, D przegrupować do środka przekątnej BD, więc środek masy A, B, C, D leży na środku odcinka łączącego środki przekątnych, więc punkt ten pokrywa się ze środkiem równoległoboku $KLMN$.

5. Twierdzenie Cevy: Punkty X, Y, Z leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Udowodnić, że proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

Rozwiązanie:
Załóżmy najpierw, że $\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$. Wtedy układ równań

$$m(A)|AZ| = m(B)|BZ|, m(B)|BX| = m(C)|CX|, m(C)|CY| = m(A)|AY|$$

ma rozwiązanie, np.:

$$m(A) = 1, m(B) = \frac{|AZ|}{|BZ|}, m(C) = \frac{|AZ|}{|BZ|}\frac{|BX|}{|CX|}$$

Jeżeli ustawimy takie masy w A, B, C, to środek masy A, B będzie w Z, więc środek masy A, B, C będzie leżał na CZ. Dalej środek masy A, C będzie w Y, więc środek masy A, B, C będzie leżał na BY, środek masy B, C będzie w X, więc środek masy A, B, C będzie na AX, stąd AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie.
Załóżmy teraz, że proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie. Ustalmy wagi jak poprzednio (ale nie możemy już zakładać, że spełniają one 3. równanie układu).
Analogicznie jak poprzednio, środkiem masy A, B jest Z, a środkiem masy B, C - X, więc środek masy A, B, C leży na przecięciu AX, CZ. Niech środek masy A, C leży w Y'. Wtedy środek masy A, B, C leży na BY', więc BY' przechodzi przez punkt przecięcia AX, CZ. Ale dokładnie jedna prosta przechodzi przez 2 różne punkty: B i punkt przecięcia AX z CZ. Stąd $BY = BY'$ i $Y = Y'$, obliczamy $|AY| = m(A)|AY| = |CY|m(C) = \frac{|AZ|}{|BZ|}\frac{|BX|}{|CX|}|CY|$, a więc

$$\frac{|CY|}{|AY|}\frac{|AZ|}{|BZ|}\frac{|BX|}{|CX|} = 1$$

czego należało dowieść.
Uwaga: w tym zadaniu i rozwiązaniu uznawaliśmy, że jeżeli X leży na boku AB, to nie pokrywa się z A, B i tak samo dla Y, Z.

6. Udowodnić, że w trójkącie $\triangle ABC$ dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.
   Rozwiązanie:
   Dowód analogiczny, jak w zadaniu 1.,2., jeżeli przypomnimy, że dwusieczna kąta $\angle ABC$ to jedyna prosta, która przecina bok BC w punkcie D spełniającym $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|DC|}$.

7. * Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK = DL$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Dowieść, że prosta AP jest dwusieczną kąta BAD (źródło - staszic).
   Rozwiązanie:
   Ustalmy masy:

   $$m(C) = |BK| = |DL|, m(D) = |CL|, m(B) = |CK|$$

   Dla tych mas środek masy B, C leży w K, więc środek masy B, C, D leży na DK, a środek masy C, D leży w L, więc środek masy B, C, D leży na BL, stąd środek masy leży w P.
   Teraz chcemy udowodnić, że środek masy leży na dwusiecznej BAD. C nie ma tu nic do rzeczy, więc masę umieszczoną w C zamieniamy na masę $-|BK|$ w A, masę $|BK| = |DL|$ w D i masę $|BK|$ w B (patrz zadanie 3.). Łącznie w D mamy teraz masę $|CD| = |AB|$, a w B masę $|BC| = |AD|$, więc środek tych mas wypada w punkcie E, leżącym na BD i spełniającym $\frac{|ED|}{|EB|} = \frac{|AD|}{|AB|}$. Na mocy uwagi z poprzedniego zadania, która nawet była udowodniona kiedyś wcześniej, E leży na dwusiecznej BAD. Oczywiście A też leży na tej dwusiecznej, więc środek masy leży na tej dwusiecznej, a jak wiadomo, środek masy leży w P.
   Rozwiązanie Mateusza:
   Jest $L \neq C$, więc proste AD i LB nie są równoległe, a więc przecinają się w pewnym punkcie X. Ponadto, skoro L leży na boku CD, to X leży po innej stronie CD niż AB. Ponadto L nie jest równy D, więc X nie jest równy L, D. Trójkąty $\triangle PDX$ i $\triangle PKB$ są podobne, bowiem wszystkie ich kąty są równe (naprzemianległe i wierzchołkowe), a więc:

   $$\frac{|PX|}{|PB|} = \frac{|XD|}{|BK|} \text{ czyli } |XD| = \frac{|PX||BK|}{|PB|} \tag{1}$$

W tym ostatnim przekształceniu korzystamy z położenia punktu X.
Ponadto $DL||AB$, więc z tw. Talesa

$$\frac{|AB|}{|DL|} = \frac{|AX|}{|DX|}$$

Podstawmy tutaj $|XD|$ z (1)

$$\frac{|AB|}{|DL|} = \frac{|AX|}{|DX|} = \frac{|AX||PB|}{|BK||PX|}$$

Skoro $|DL| = |BK|$, możemy skrócić je i podzielić obie strony przez $|PB|$:

$$\frac{|AB|}{|PB|} = \frac{|AX|}{|PX|}$$

To już dowodzi, z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego, że P leży na dwusiecznej kąta BAX, czyli kąta BAD (tutaj używamy położenia X). W rozwiązaniu nie ma mas, jest za to pomysłowa konstrukcja X.

8. ** (International Mathematical Olympiad 1999) Na płaszczyźnie mamy dany skończony zbiór różnych punktów $A_1, \cdots, A_n$, który spełnia własność: jeżeli weźmiemy dowolne 2 różne punkty A_i, A_j z tego zbioru i skonstruujemy symetralną l odcinka A_iA_j, to mamy $\{S(A_1), S(A_2), \cdots, S(A_n)\} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, gdzie $S(X)$ oznacza odbicie punktu X w symetrii względem l, czyli zbiór S nie zmienia się w symetrii względem l. Udowodnić, że $A_1, \cdots, A_n$ są wierzchołkami n-kąta foremnego.
Rozwiązanie:
Wykażemy, najpierw że te punkty leżą na okręgu o środku w środku M masy tego układu, gdzie $m(A_i) = 1$ dla wszystkich i. Weźmy dowolne 2 punkty A_i, A_j z tego zbioru. Skoro w symetrii względem symetralnej A_iA_j zbiór przechodzi na siebie, to środek ciężkości nie zmienia się, więc M leży na symetralnej A_iA_j, stąd $|MA_i| = |MA_j|$, a skoro i, j były wzięte dowolnie, to $|MA_1| = |MA_2| = \cdots = |MA_n|$, więc punkty $A_1, \cdots, A_n$ leżą na okręgu o środku w M i promieniu $|MA_1|$.
Weźmy dowolne 3 punkty sąsiednie na okręgu i nazwijmy je A, B, C. Rozważmy symetrię względem symetralnej AC. Punkt B przechodzi w niej na punkt leżący na tym samym łuku AC. Ale punkty były sąsiednie, więc B musi przechodzić na siebie. To dowodzi, że łuki AB i AC są równe, więc, jeżeli ustawimy punkty, tak jak, leżą one na okręgu, to

$$\angle A_1MA_2 = \angle A_2MA_3 = \angle A_3MA_4 = \cdots = \angle A_{n-1}MA_n = \angle A_nMA_1$$

To już dowodzi, że punkty te są wierzchołkami wielokąta foremnego.

Zadania jubileuszowe

1. Wokół okrągłego stołu siedzi 13 ufoli. Początkowo jeden z ufoli ma 13 czarnych dziur. W jednym ruchu każdy ufol, który posiada co najmniej 2 czarne dziury, może wziąć 2 ze swoich czarnych dziur i podarować po jednej czarnej dziurze każdemu ufolowi siedzącemu obok. Powiedz ufolom, czy może dojść do sytuacji, gdy po pewnej liczbie ruchów każdy ufol ma po jednej czarnej dziurze.

2. Udowodnij, że jeżeli posadzimy wśród ufoli Martę i damy jej 13 + 1 czarnych dziur, nie zdoła ona rozdzielić tak czarnych dziur, żeby każdy ufol miał po jednej i jedna została Marcie, stosując algorytm opisany w powyższym zadaniu, gdzie Martę traktujemy jako ufola.

3. Mamy 13 osób z klasy $3b$. Niektóre z nich kolegują ze sobą. Jeżeli A uważa B za kolegę, to B uważa A za kolegę. Jest jednak wyjątek: Kozik uważa za kolegów wszystkich, niezależnie od tego, czy oni uważają go za kolegę. Czy może się zdarzyć, że każdy uważa, że ma inną liczbę kolegów?