Co Ty wiesz o kombinowaniu?

1. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.
   Rozwiązanie:
   Wybieramy punkt A, z którego wychodzi najwięcej narysowanych odcinków. Pokażemy najpierw, że z punktu A wychodzą co najmniej 4 odcinki.
   Przypuśćmy więc, że jest inaczej. Z każdego punktu wychodzą zatem co najwyżej 3 odcinki. Ponieważ mamy 6 punktów, więc łącznie mamy co najwyżej $6 \cdot 3 = 18$ końców tych odcinków, a więc mamy co najwyżej 9 narysowanych odcinków. To jednak jest sprzeczne z założeniem.
   Z punktu A wychodzą zatem co najmniej 4 odcinki: AB, AC, AD i AE. Teraz zauważamy, że 6 punktów można połączyć dokładnie $\binom{6}{2} = 15$ odcinkami. Zatem wśród 6 odcinków
   $$BC, BD, BE, CD, CE \text{ i } DE$$
   narysowano co najmniej jeden. Końce tego odcinka wraz z punktem A są wierzchołkami narysowanego trójkąta.

2. W turnieju uczestniczy $2n$ graczy; każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trojka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów nie przekracza n^2.
   Rozwiązanie:
   Wybieramy gracza A, który rozegrał najwięcej gier. Niech k będzie liczbą gier rozegranych przez gracza A i niech S będzie zbiorem graczy, z którymi gracz A grał.
   Niech T będzie zbiorem tych graczy, z którymi gracz A nie grał. Oczywiście zbiór T ma $2n - k - 1$ elementów. Zauważmy, że gracze ze zbioru S nie grali ze sobą. Gdyby bowiem gracze $B, C \in S$ grali ze sobą, to razem z graczem A tworzyliby trojkę graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze.
   Zatem w każdym meczu musiał uczestniczyć gracz A lub któryś z graczy ze zbioru T. Każdy z tych graczy rozegrał jednak co najwyżej k gier (gdyż A wybraliśmy jako tego, kto rozegrał najwięcej). Zatem liczba wszystkich gier jest nie większa od $k + (2n - k - 1) \cdot k$ i pozostaje nam udowodnić nierówność
   $$k + (2n - k - 1) \cdot k \leq n^2$$
   równoważną
   $$(2n - k) \cdot k \leq n^2$$
   $$\sqrt{(2n - k) \cdot k} \leq \frac{(2n - k) + k}{2}$$
   czyli nierówności pomiędzy średnimi.

3. W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych szkołach razem co najmniej $n + 1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają.
   Rozwiązanie:
   Wybieramy ucznia mającego największą liczbę znajomych w jednej z pozostałych szkół. Przypuśćmy, że tym uczniem jest uczeń A ze szkoły S_1. Zakładamy, że w szkole S_2 zna on k uczniów, przy czym liczba k jest wspomnianą największą liczbą znajomych.
   Ponieważ uczeń A nie może znać $n + 1$ uczniów w szkole S_2 (ma ona n uczniów), więc zna co najmniej jednego ucznia w szkole S_3; niech tym uczniem będzie B. Uczeń B zna co najwyżej k osób w szkole S_1, a więc zna co najmniej $n + 1 - k$ uczniów w szkole S_2. Gdyby znajomi uczniów A i B w

szkole S_2 tworzyli dwa zbiory rozłączne, to szkoła S_2 miałaby co najmniej $k + (n + 1 - k) = n + 1$ uczniów, co jest sprzeczne z założeniem.
Zatem w szkole S_2 istnieje uczeń znający zarówno A jak i B; wraz z uczniami A i B tworzy on szukaną trojkę uczniów.

4. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.
Źródło: XLV OM
Rozwiązanie:
Wybieramy największą liczbę rozłącznych par znajomych:

$$\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_m, b_m\}$$

Jeśli $m = n$, to te pary kwaterujemy w oddzielnych pokojach. Niech więc $m < n$.
Z maksymalności m wynika, że żadne dwie pozostałe osoby nie znają się. Wybieramy dwie z nich: x i y. W każdej parze $\{a_i, b_i\}$ zliczamy znajomych x i y. Jeśli w każdej parze osoby x i y znają co najwyżej 2 osoby, to mają łącznie co najwyżej $2m < n + n$ znajomych, wbrew założeniu.
Istnieje zatem para, w której znają łącznie co najmniej 3 osoby. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że osoba x zna obie osoby a_i i b_i, a osoba y zna osobę a_i. Zastępując parę $\{a_i, b_i\}$ parami $\{x, b_i\}$ oraz $\{y, a_i\}$, otrzymujemy $m + 1$ rozłącznych par znajomych, wbrew wyborowi liczby m. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $m = n$.