Kombinatoryka 2

Joachim Jelisiejew
11 października 2011

1.1 Zadania dla młodszych

Inspiracja do zadań pochodzi ze strony www.omg.edu.pl.

Zadanie M1

Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty o takim samym kolorze odległe o $2011cm$.

Zadanie M2

Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów, przy czym istnieją na tej płaszczyźnie punkty różnych kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów odległe o $2011cm$.

Zadanie M3

W pokoju znajduje się 2011 osób, z których niektóre znają się wzajemnie. Udowodnić, że można znaleźć dwie osoby mające tyle samo znajomych.

Wskazówka: dowód przez zaprzeczenie.

Zadanie M4

Wybrano 2^{10} różnych liczb całkowitych dodatnich nie przekraczających 2011. Udowodnij, że istnieją wśród nich liczby różniące się o 7. Dla jakich innych liczb oprócz 7 umiesz udowodnić istnienie takich liczb?

1.2 Zadania dla starszych

Zadanie S1

Sześć okręgów na punkt wspólny. Udowodnij, że co najmniej jeden ze środków tych okręgów leży na brzegu lub wewnątrz innego okręgu.

Zadanie S2

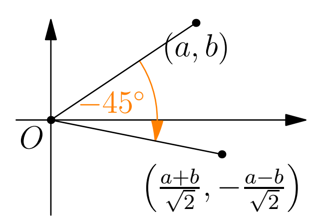
Dany jest ciąg 2010 liczb

$$T = (0, 1, , \dots, 2009)\,.$$

Możemy wybrać z tego ciągu dwa dowolne elementy, pomniejszyć jeden z nich o 1 oraz powiększyć drugi o 1. Czy wielokrotnie tak postępując możemy dojść do ciągu, którego wszystkie elementy dają taką samą resztę z dzielenia przez 2010?

Zadanie S3

Na tablicy napisano liczby $1, 2, 4, 5$. Operacja polega na wybraniu dwóch liczb a i b — spośród napisanych na tablicy — i zastąpieniu ich liczbami $\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}$.
Udowodnij, że za pomocą takich operacji nie można otrzymać na tablicy liczb $1, 2\sqrt{2}, 3, 4\sqrt{2}$.



Zadanie z $\star$: domyślić się, ocb z rysunkiem.