Powrót wielomianów

Teoria

1. Jeżeli wielomian W ma współczynniki całkowite to
$$a-b|W(a)-W(b)$$
dla wszystkich liczb całkowitych $a \neq b$.

2. Dla każdego x_0 i każdego wielomianu $W(x)$ zachodzi $W(x)=(x-x_0)P(x)+W(x_0)$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem, który jest **różny dla różnych** x_0. Ponadto jeżeli $W(x)$ miało współczynniki całkowite i x_0 jest całkowite, to $P(x)$ ma współczynniki całkowite. (Twierdzenie Bèzouta)

3. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ o współczynnikach zespolonych (w szczególności także rzeczywistych). Wówczas prawdziwe są wzory:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$
nazywane wzorami Viète'a.

Podzielność

1. Dany jest wielomian całkowitoliczbowy $P(x)$, taki, że $3|P(7)$ oraz $7|P(3)$. Wykaż, że $21|P(10)$.
Źródło: Staszic

2. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia warunki:
$$17|W(15), 13|W(0), 9|W(11)$$
Pokazać, że 1989|W(1001).
Źródło: Staszic

Wielomian pomocniczy

1. Rozwiązać układ równań w rzeczywistych a, b, c, d :
$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-1 \\ abc+abd+acd+bcd=-16 \\ abcd=-12 \end{cases}$$
Źródło: Staszic

2. Rozwiązać układ równań w liczbach rzeczywistych:
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{cases}$$

3. Liczby x, y, z spełniają równości: $x+y+z=a$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$. Udowodnić, że przynajmniej jedna z nich jest równa a.

4. Suma trzech liczb całkowitych u, v, w jest równa zeru. Udowodnij, że liczba $2u^4+2v^4+2w^4$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Rozwiązać układ równań w dodatnich a, b, c :

$$\begin{cases} ab+bc+ac=12 \\ a+b+c+2=abc \end{cases}$$

   Źródło: Staszic

6. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równania:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-3 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=7 \\ abc+abd+acd+bcd=3 \end{cases}$$

   Pokazać, że istnieje taka liczba rzeczywista M, ze $M \geq abcd \geq -2$.
   Źródło: Staszic

Różności

1. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.
   Źródło: LVIII OM II^o

2. Dany jest wielomian $W(x)=x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniających warunek: Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p. Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której:

$$W(m)=W(m+1)=0$$

   Źródło: LVI OM II^o

3. Znaleźć reszty z dzielenia wielomianu $(x^2-x-1)^{2008}$ przez wielomiany: $x-1$ i x^2-1.
   Źródło: Staszic

4. Znajdź wszystkie wielomiany $p(x)$, dla których zachodzi następująca tożsamość:

$$(x-26)p(x)=xp(x-1)$$

   dla każdej liczby rzeczywistej x.

5. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równość:

$$P(x^2-y^2)=P(x+y)P(x-y)$$

   Źródło: Staszic