Ciągi jednomonotoniczne

kółko I LO Białystok
23 kwietnia 2013

Bardzo dobrym podręcznikiem, uczącym m.in. o ciągach jednomonotonicznych jest książka L. Kurlandczyka "Wędrówki po krainie nierówności".

Jeżeli mamy ciągi liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ to

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

jest fajnym zapisem czegoś oczywistego. Przykładowo $5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 4$. To jest ogólniejszy fenomen:

Twierdzenie 1. *Weźmy ciągi niemalejące $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Jeżeli $b_1', \ldots, b_n'$ jest permutacją ciągu $b_1, \ldots, b_n$, to*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1' & b_2' & \ldots & b_n' \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}.$$

Innymi słowy: największą wartość osiągamy układając ciągi zgodnie, najmniejszą — przeciwnie.

Wskazówka do dowodu. Chcemy wybrać i "posortować" permutację $b_1', \ldots, b_n'$. Wystarczy pokazać, że jeżeli $a_i \leqslant a_j$ oraz $b_i \geqslant b_j$, to $a_i b_i + a_j b_j \leqslant a_i b_j + a_j b_i$. □

Wniosek 2. *Ustalmy ciągi $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ takie, że z nierówności $a_i > a_j$ wynika $b_i \geqslant b_j$. Jeżeli $b_1', \ldots, b_n'$ jest permutacją ciągu $b_1, \ldots, b_n$, to*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1' & b_2' & \ldots & b_n' \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Zaiste, zamieńmy indeksy tak, by ciąg $a_1, \ldots, a_n$ był uporządkowany niemalejąco. Na mocy założeń $b_1, \ldots, b_n$ też jest uporządkowany niemalejąco!! Teraz możemy zastosować poprzednie stwierdzenie. □

Warto podkreślić, że, w przeciwieństwie do średnich, ciągi nie potrzebują założenia, że liczby są dodatnie.

Zadanka

Zadanie 1

Uzasadnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geqslant a^2 + b^2.$$

Czy i dlaczego warunek dodatniości liczb a, b jest potrzebny?

Zadanie 2

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi

$$2a^2b^2 \leqslant a^3 b + b^3 a \leqslant a^4 + b^4.$$

Zadanie 3

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi

$$a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a \leqslant a^3 + b^3 + c^3 + d^3.$$

Zadanie 4
Uzasadnij, że jeżeli $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, to

$$n \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Użyj tej nierówności, by udowodnić nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową, ale uważaj na założenia.

Zadanie 5
Uzasadnij, że jeżeli a, b, c są dowolnymi liczbami dodatnimi, to

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Zadanie 6
Niech w trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości a, b, c odpowiednio. Uzasadnij, że

$$(a+b+c)(h_a + h_b + h_c) \geqslant 18P_{ABC}.$$

Zadanie 7
Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{a\sqrt{a}}{a+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+a}.$$

Zadanie 8
Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a}.$$