Przekręty płaszczyzny

Teoria

1. **Definicja** *Kątem skierowanym $\angle ABC = \angle(AB, BC)$ będziemy nazywać miarę kąta o jaki trzeba przekręcić płaszczyznę wokół B tak, by* ***półprosta*** *BA przeszła na półprostą BC. Taki kąt jest dokładnie jeden z dokładnością do $360°$ i z tą dokładnością będziemy mierzyć. Ponadto, dla uzupełnienia definicji miary kąta skierowanego, zakładamy, że miara ta nie zmienia się przy przesunięciu o wektor i obrocie.*

   Oczywiście jeżeli przekręcimy półprostą BA na BC, a później półprostą BC na BA, to otrzymujemy obrót przenoszący półprostą BA na BA, czyli obrót o $0°$. Stąd wynika dziwna równość

   $$\angle CBA = -\angle ABC$$

   w przeciwieństwie do zwykłych kątów, gdzie mamy $ABC = CBA$. Zwykle przyjmuje się, że kręcimy przeciwnie do wskazówek zegara, czyli kąt $\angle(XO, OY) = 90°$ (OX, OY, to osie układu współrzędnych, $X = (0,1), Y = (1,0)$).

2. W zdaniu „miara kąta nie zmienia się w przesunięciu o wektor i obrocie" chodzi o to, że jeżeli mamy przekształcenie J które jest obrotem lub przesunięciem o wektor, to mamy $\angle(AB, BC) = \angle(J(AB), J(BC))$, gdzie $J(AB)$ to półprosta otrzymana po przekształceniu półprostej AB. Zauważmy, że zwykła miara kąta nie zmienia się przy przesunięciu, obrocie i symetrii względem prostej. Inaczej jest z kątami skierowanymi.

   Lemat *Kąt skierowany zmienia znak w symetrii względem prostej.*

   Dowód: Weźmy dowolny kąt $\angle ABC$. Można założyć, że mamy policzyć jego miarę w symetrii względem dwusiecznej l tego kąta skierowanego (która jest zdefiniowana tak samo, jak dwusieczna zwykłego kąta), bowiem w innym przypadku możemy tak przesuwać i obracać kąt (nie zmieniając miary), że prosta, względem której robimy symetrię, stanie się tą dwusieczną.
   W symetrii względem prostej l półprosta BA przechodzi na BC, a BC przechodzi na BA, więc $\angle ABC$ w tej symetrii przechodzi na $\angle CBA$, bowiem obrót o α przenosi BA na BC, więc po symetrii przenosi on BC na BA. Stąd kąt $\angle ABC$ zmienia się w $\angle CBA = -\angle ABC$.
   Jeżeli S jest symetrią względem prostej, to przenosi ona kąt skierowany na kąt symetryczny do niego: $S(\angle ABC) = \angle S(A)S(B)S(C)$. Stąd wynika $\angle S(A)S(B)S(C) = -\angle ABC$, czyli

   $$\angle S(C)S(B)S(A) = \angle ABC$$

3. Można zrezygnować z warunku, że odpowiednie półproste przechodzą na siebie i rozważać kąty z dokładnością do $180°$, ale wtedy obrót o $180°$ jest nie do odróżnienia od obrotu o $0°$, a zwykle są to jednak dwa różne przeształcenia, więc **nie** będziemy rezygnować z tego warunku.

4. W kątach skierowanych kąty wierzchołkowe i naprzemianległe (zgodnie skierowane) są równe, bowiem można odpowiednio obrócić i przesunąć. Mamy również zawsze

   $$\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$$

Dowód: obrót o $\angle BAC$ przenosi półprostą AB na AC, a obrót o kąt $\angle CAD$ przenosi półprostą AC na półprostą AD, stąd obrót o kąt $\angle BAC + \angle CAD$ przenosi AB na AD, czyli z definicji $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ (było tutaj milczące założenie, że obrót wokół A o $\alpha + \beta$ to złożenie obrotu wokół A o α i obrotu wokół A o β).

Możemy więc spokojnie dodawać kąty skierowane, czego raczej nie mogliśmy robić ze zwykłymi kątami (przypadek, gdy D leży wewnątrz kąta $\angle BAC$). Ta równość jest główną przewagą kątów skierowanych nad zwykłymi. Możemy z niej wywnioskować, że $\angle CBA = -\angle ABC$, bowiem z definicji $\angle BAB = 0°$.

5. Suma kątów zgodnie skierowanych trójkąta $\triangle ABC$ wynosi $180°$, innymi słowy:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

Dowód: Niech D będzie obrazem A w przesunięciu o wektor $\vec{BC}$. Wtedy $\angle ABC = \angle DCX$, gdzie X leży daleeko na półprostej BC. Z równości kątów naprzemianległych otrzymujemy $\angle CAB = \angle ACD$, więc

$$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB = \angle DCX+\angle BCA+\angle ACD = \angle BCA+\angle ACD+\angle DCX = \angle BCX = 180°$$

Ostatnia równość wprost z definicji.

6. Najprościej jest myśleć o kątach skierowanych, jak o zwykłych kątach ze sztucznie dodanym zwrotem (kąty lewoskrętne i prawoskrętne) i sztucznie określonymi regułami: kąty o tym samym zwrocie dodajemy, a o przeciwnych odejmujemy.

7. **Definicja** *Obrotem o kąt skierowany $\alpha = \angle(BA, AC)$ wokół A nazywamy obrót wokół A, który półprostą AB przenosi na półprostą AC i piszemy O_A^α. A nazywamy środkiem obrotu. Zauważmy, że jeżeli obrót nie jest o kąt $0°$, to jedynym punktem, który po obrocie zostaje niezmieniony jest A.*

8. **Lemat** *Obrót O_A^α da się zapisać jako złożenie symetrii względem prostej BA z symetrią względem prostej AC (najpierw odbijamy względem BA) dla których jest $\angle(BA, AC) = \frac{\alpha}{2}$, co zapisujemy jako $O_A^\alpha = S_{AC} \circ S_{BA}$.*

Dowód: Weźmy dowolne proste AB i AC, takie, że kąt skierowany pomiędzy BA a AC to $\frac{\alpha}{2}$. Wtedy $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ lub $\angle BAC = \frac{\alpha}{2} + 180°$, tak czy inaczej $2\angle BAC = \alpha$.
Weźmy dowolne $X \neq A$. Niech X' oznacza X odbity w symetrii względem BA, a X'' oznacza X' odbity w symetrii względem AC. Wtedy $\angle XAB = \angle BAX'$ i $\angle X'AC = \angle CAX''$, stąd $\angle XAX'' = \angle XAB + \angle BAX' + \angle X'AC + \angle CAX'' = 2(\angle BAX' + \angle X'AC) = 2\angle BAC = \alpha$.
Zauważmy, że korzystaliśmy w tych równościach z $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ i $\angle S(C)S(B)S(A) = \angle ABC$ i dzięki temu nie musieliśmy rozważać niezliczonych przypadków.

9. **Twierdzenie** *Złożenie obrotów O_A^α i O_B^β (najpierw obrót wokół A), czyli $O_B^\beta \circ O_A^\alpha$ (składamy od prawej) jest*

   (a) Obrotem o kąt $\alpha + \beta$ wokół X takiego, że $\angle XAB = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle XBA = -\frac{\beta}{2}$ jeśli $\alpha + \beta \neq 0$,

   (b) Przesunięciem płaszczyzny o wektor $2\vec{AB}$ jeżeli $\alpha+\beta$ jest wielokrotnością $360°$, czyli $\alpha+\beta = 0$ (mierzymy z dokładnością do $360°$).

Dowód: Niech XA będzie taką prostą, że $\angle XAB = \frac{\alpha}{2}$ i niech BY będzie taką prostą, że $\angle ABY = \frac{\beta}{2}$ (punkty X, Y leżą gdzieś daleko i służą tylko do ustalania półprostych). Z lematu $O_A^\alpha = S_{AB} \circ S_{XA}$ i $O_B^\beta = S_{BY} \circ S_{AB}$, więc $O_B^\beta \circ O_A^\alpha = S_{BY} \circ S_{AB} \circ S_{AB} \circ S_{XA}$. Oczywiście dwukrotna symetria względem prostej AB to to samo co identyczność, więc

$$O_B^\beta \circ O_A^\alpha = S_{BY} \circ S_{XA}$$

Rozważmy 2 przypadki:

(a) Proste AX i BY są równoległe. Jest $\angle XAB = \angle YBC$, gdzie C leży na prostej BA po innej stronie B niż A, więc $\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \angle ABY + \angle XAB = \angle ABY + \angle YBC = \angle ABC = 180°$, więc $\beta + \alpha = 2 \cdot 180° = 360° = 0°$.
Niech D będzie dowolnym punktem płaszczyzny, niech D' oznacza jego obraz w symetrii względem AX, a D'' obraz D' w symetrii względem BY, D_1 oznacza rzut prostopadły D na AX, a D_2 rzut prostopadły D na BY. Skoro $AX||BY$, to punkty D, D_1, D_2, D', D'' leżą na jednej prostej prostopadłej do AX.
Mamy, z własności symetrii $\vec{DD_1} = \vec{D_1D'}$ i $\vec{D'D_2} = \vec{D_2D''}$, ponadto, skoro wszystko leży na jednej linii, to $\vec{DD''} = \vec{DD_1} + \vec{D_1D'} + \vec{D'D_2} + \vec{D_2D''} = 2(\vec{D_1D'} + \vec{D'D_2}) = 2\vec{D_1D_2} = 2\vec{AB}$.

(b) Jeżeli AX i BY nie są równoległe to $\alpha + \beta \neq 0$ (rozumowanie analogiczne jak wyżej). Niech C oznacza punkt przecięcia AX i BY. Mamy

$$O_B^\beta \circ O_A^\alpha = S_{BY} \circ S_{XA} = O_C^{2\angle(XC,CY)}$$

Popatrzmy na trójkąt $\triangle ABC$. Kąt $\angle CAB$ to $\frac{\alpha}{2}$ lub $\frac{\alpha}{2} - 180°$, w zależności od tego, po której stronie prostej AB leży C i X (sprawdź na rysunku), ale zawsze zachodzi $2\angle CAB = \alpha$.
Analogicznie $\angle ABC$ może być równy $\frac{\beta}{2}$ lub $\frac{\beta}{2} + 180°$, tak czy owak $2\angle ABC = \beta$.
Skoro $\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180°$, $\alpha + \beta + 2\angle BCA = 2\angle ABC + 2\angle CAB + 2\angle BCA = 0°$, więc $2\angle BCA = -(\alpha + \beta)$, czyli $2\angle ACB = \alpha + \beta$.

10. **Definicja** *Powiemy, że 2 figury są zgodnie zorientowane, jeżeli są one podobne:* $A_1A_2 \cdots A_n \simeq B_1B_2 \cdots B_n$ *i odpowiednie kąty* ***skierowane*** *są równe:*

$$\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3, \angle A_2A_3A_4 = \angle B_2B_3B_4, \cdots, \angle A_{n-1}A_nA_1 = \angle B_{n-1}B_nB_1, \angle B_nB_1B_2 = \angle A_nA_1A_2$$

11. Ten tekst powstał w dużej mierze w oparciu o artykuł prof. Piotra Grzeszczuka z Delty 10/04 dostępnego pod *www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta1004/grzeszczuk.pdf.*

Zadania

1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC i jest $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$. P' jest takie, że trójkąt $\triangle APP'$ jest zgodnie zorientowany z $\triangle ABC$. Udowodnij, że $PP'C = 90°$.

2. Na płaszczyźnie dane są 2 trójkąty równoboczne zgodnie zorientowane ABC i CDE (mające wspólny wierzchołek C) oraz punkty F i G, takie, że $AD = AF$, $BE = BG$ i $\angle DAF = \angle EBG$ (kąty skierowane!). Wykazać, że trójkąt CFG jest równoboczny.

3. Na ścianach trójkąta ABC budujemy, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne. Udowodnij, że środki ciężkości tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny.

4. Dane są rozłączne oprócz punktu C, zgodnie zorientowane kwadraty $ACMN$ i $KLCB$ o środkach P i R odpowiednio. Niech Q, S będą środkami odcinków AB, ML. Wykazać, że $PQRS$ jest kwadratem.

5. Dane są punkty A, B, C, D tworzące czworokąt wypukły. Punkt P jest taki, że $|AP| = |BP|$, $|CP| = |DP|$ oraz $APB = CPD = 90°$. Udowodnij, że $|AC| = |BD|$ i $AC \perp BD$. Przy okazji, jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, żeby przekątne w czworokącie przecinały się pod kątem prostym?

6. Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty prostokątne równoramienne ABP, BCQ, CDR, DAS, z kątami prostymi przy P, Q, R, S. Udowodnij, że $PR \perp QS$.

7. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i jest taki, że ADP i BCP są równoboczne. Na bokach AB i CD zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne ABL i CDM. Udowodnić, że P jest środkiem odcinka LM.

8. Na zewnątrz boków AB i BC trójkąta ABC zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne ABP i BCQ, z kątami prostymi przy wierzchołkach P i Q. Udowodnić, że jeżeli M - środek boku AC, to trójkąt MPQ jest też równoramienny prostokątny.

9. **58 OM, 2 etap, zadanie 2.** Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$, $BCD = DEA = 90^\circ$. Udowodnić, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC.

10. **57 OM, 2 etap, zadanie 5.** Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez A, C przecina okrąg o_2 przechodzący przez B, C w różnych punktach C, D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera C. Dowieść, że $CD \perp PQ$.