



Niezmieniiki II

[...] He uses math to find the answer
The secret geometry of change
The hidden law, an invisible constraint
Proving he cannot rearrange.

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK
20 LISTOPADA 2012

Pierwsza linia (hastati)

ZADANIE H1

Na tablicy zapisane są liczby $1, 2, 3, \dots, 2010$. Wybieramy dowolne dwie liczby a, b , ścieramy je i wpisujemy $|a - b|$. Uzasadnij, że liczba, która pozostanie na końcu będzie nieparzysta.

ZADANIE H2 MATMA.ILO.PL

Wokół okrągłego stołu siedzi 14 ufoli. Początkowo jeden z ufoli ma 14 czarnych dziur. W jednym ruchu każdy ufol, który posiada co najmniej dwie czarne dziury, może wziąć dwie ze swoich czarnych dziur i podarować po jednej czarnej dziurze każdemu ufolowi siedzącemu obok. Powiedz ufolom, czy może dojść do sytuacji, gdy po pewnej liczbie ruchów każdy ufol ma po jednej czarnej dziurze.

Druga linia (principes)

ZADANIE P1

Sto dwadzieścia siedem osób uczestniczy w turnieju tenisowym. Udowodnij, że w dowolnym momencie trwania tego turnieju graczy, którzy rozegrali nieparzyście wiele gier jest parzyście wiele.

ZADANIE P2

Liczba n jest całkowita. Liczby $1, 2, \dots, 2n$ są ustawione (w losowym porządku) w tablicy indeksowanej liczbami od 1 do $2n$. Do każdej liczby dodajemy jej indeks, po czym zamieniamy ją na jej resztę z dzielenia przez $2n$. Czy niezależnie od ustawienia uzyskamy dwie równe liczby?

Uwaga dla ekspertów: tak, używamy Pascala.

ZADANIE P3

Na obwodzie koła zapisano 2011 jedynek i 2012 zer. W jednym kroku wpisujemy 0 pomiędzy dwoma kolejnymi i równymi liczbami oraz 1 pomiędzy dwoma kolejnymi i nierównymi liczbami, po czym ścieramy stare liczby. Czy możemy, powtarzając tę operację, uzyskać konfigurację złożoną z samych zer?

ZADANIE P4

W każde pole prostokątnej tablicy wpisano liczbę całkowitą dodatnią. W jednym kroku możemy odjąć jeden od każdej liczby w wybranej kolumnie lub podwoić liczby w wybranym rzędzie. Czy możemy, wykonując skończenie wiele kroków, uzyskać tablicę złożoną z samych zer?

ZADANIE P5 sgn

Liczby całkowite $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2012}$ są ustawione w pewnym porządku. Karolina w jednym ruchu zamienia miejscami wybrane dwie kolejne liczby. Łącznie wykonuje ona n ruchów, przy czym po ostatnim z nich porządek liczb jest zachowany.

Stwierdź, dla których n jest to możliwe.

ZADANIE P6

Smok ma 100 (liczba uświęcona tradycją) głów. W jednym ruchu rycerz może obciąć dokładnie 15, 17, 20 lub 5 głów, a smokowi odrasta 24, 2, 14 lub 17 głów odpowiednio. Smok ginie, jeżeli wszystkie jego głowy zostają ścięte. Rycerz ginie, jeżeli smokowi zdzi się zabawa w ścinanie głów. Czy smok może zginąć?

ZADANIE P7

Na tablicy napisanych jest n liczb 1. W każdym kroku wybieramy i wycieramy liczby a, b i wpisujemy liczbę $(a + b)/4$.

1. Uzasadnij, że suma odwrotności liczb nie zwiększa się w danym kroku.
2. Udowodnij, że po $n - 1$ krokach pozostanie liczba równa co najmniej $1/n$.

Nadchodzące kółko (triarii)

ZADANIE T1 PRZYPOMNIENIE

Na płaszczyźnie wybrano skończenie wiele punktów tak, że pole dowolnego trójkąta o wierzchołkach w wybranych punktach jest nie większe niż 1. Uzasadnij, że wszystkie punkty leżą pewnym w trójkącie o boku 2 (być może na obwodzie).

Wskazówka: należało rozważyć trójkąt o największym polu.

ZADANIE T2

Niech \mathcal{A}, \mathcal{B} będą takimi skończonymi zbiorami punktów na płaszczyźnie, że każdy odcinek o końcach w \mathcal{A} zawiera punkt z \mathcal{B} i każdy odcinek o końcach w \mathcal{B} zawiera punkt z \mathcal{A} . Udowodnić, że wszystkie punkty z $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ leżą na jednej prostej.

Wskazówka: gdyby nie, powstałyby trójkąty. Wybierz szczególny :)

ZADANIE T3

Sala, w której odbywają się zawody Podlaskiego Konkursu Matematycznego ma dwie połowy (i dużo zdezelowanych pulpitów).

Każdy z uczestników konkursu ma co najwyżej trzech znajomych wśród pozostałych uczestników. Wykazać, że uczestników konkursu można rozmieścić w sali tak, aby każda osoba miała z "swojej" połowie co najwyżej jednego znajomego.

Wskazówka: jak można "poprawić" ustawienie? Jeżeli już to wiesz, wybierz "najlepsze" i udowodnij, że jest dobrze! Jeżeli zrobisz to zadanie, zastanów się, które z zadań z poprzedniego kółka stosuje praktycznie ten sam trik, zupełnie inaczej wyglądając.