



Grafowie

Graf jest to dostojnik w państwie krzyżackim. Graf jest skończony, jeżeli zginął pod Grunwaldem. [www]

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK
19 MARCA 2013

Graf = wierzchołki V i krawędzie E łączące je. Krawędzie mogą być dwukierunkowe (domyślnie) lub jednokierunkowe (wtedy graf nazywamy *skierowanym*).

Trochę oznaczeń. *Ścieżką* nazywamy sam-wiesz-jaki ciąg krawędzi. Graf nazywamy *prostym* jeżeli każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź i żadna krawędź nie łączy wierzchołka ze sobą. Graf nazywamy *spójnym* jeżeli każde dwa wierzchołki łączy (co najmniej jedna) ścieżka. *Cyklem* nazywamy ścieżkę zaczynającą się i kończącą w tym samym wierzchołku.

Cyklem Hamiltona nazywamy cykl przechodzący przez każdy *wierzchołek* grafu dokładnie raz (pomijając początkowy). *Cyklem Eulera* nazywamy cykl przechodzący przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

Stopniem wierzchołka v grafu nieskierowanego nazywamy liczbę krawędzi, których końcem jest v .

ZADANIE 1 DRZEWA

Graf prosty i spójny ma mniej krawędzi niż wierzchołków. O ile mniej jest krawędzi? Czy graf ten może zawierać cykl?

ZADANIE 2

Udowodnij, że w kraju, w którym każde miasto jest połączone z każdym innym drogą jednokierunkową, istnieje miasto, z którego da się pojechać do każdego innego.

ZADANIE 3

Na Inflantach jest n miast, niektóre z nich łączą jednokierunkowe drogi przy czym z każdego z miast wychodzi tyle dróg, ile do niego wchodzi. Jednym z miast jest stolica, z której można dojechać do każdego miasta. Uzasadnij, że z każdego miasta można dojechać do każdego innego.

ZADANIE 4

Uczniowie z 2b rozwalili model sześcianu — pozostało tylko 7 wierzchołków ze wszystkimi krawędziami. Na pociechę powiedz im, czy tak powstały graf ma cykl Hamiltona (istnienie cyklu ukoiliby p. Pawłowską).

ZADANIE 5

Ile wynosi suma stopni wierzchołków grafu nieskierowanego? Wywnioskuj z odpowiedzi, że liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

ZADANIE 6

Uzasadnij, że spójny (nieskierowany) graf ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego z wierzchołków jest parzysty.

ZADANIE 7

Graf prosty, niespójny G ma n wierzchołków. Ile co najwyżej może on mieć krawędzi?

ZADANIE 8 ★ TWIERDZENIE OREGO

Graf prosty G ma $n \geq 3$ wierzchołków. Suma stopni dowolnych dwóch z jego wierzchołków wynosi co najmniej n . Uzasadnij, że G ma cykl Hamiltona.

Wskazówka: Możesz wybrać "największy graf" który nie spełnia tezy tzn. taki, że po dołożeniu dowolnej krawędzi graf już będzie miał cykl. Ten cykl trzeba podrasować, żeby pasował i do mniejszego.

ZADANIE 9

Na uczcie zwycięstwa zebrało się $2n$ rycerzy polskich. Wiadomo, że każdy z nich klóci się o chwałę z co najwyżej $n - 1$ z pozostałych rycerzy. Uzasadnij, że Jagiełło może rozsądzić rycerzy przy okrągłym stole tak, by nikt nie klócił się z sąsiadem.

Zadania pochodzą ze Staszica, PB itd., zaś grafowie spod Malborka.