Elementarne rozwiązanie zadania o 30-kącie

Joachim Jelisiejew

Zadanie Udowodnić, że w 30-kącie foremnym przekątne A_1A_{19}, A_3A_{24} oraz A_8A_{28} przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

1. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na 30-kącie oraz niech P będzie przecięciem OA_{30} z A_8A_{28}. Udowodnię, że P jest szukanym punktem.

2. **Lemat 0.1** *Punkty O i A_3 są symetryczne względem prostej A_8A_{28}.*

   Dowód:
   $\angle A_3OA_{28} = 10 \cdot 6^\circ = 60^\circ$. Trójkąt A_3OA_{28} jest więc równoboczny, analogicznie A_3OA_8 jest równoboczny, a z tego wynika teza.

3. Udowodnię, że A_3A_{24} przechodzi przez P. Zauważmy, że z lematu wynika, że $\angle OA_3P = \angle A_3OP = \angle A_3OA_{30} = 6 \cdot 6^\circ$. Ponieważ zachodzi również $\angle OA_3A_{24} = 6 \cdot 6^\circ$ oraz punkty P, A_{24} leżą z tej samej strony OA_3, to dowód jest zakończony.

4. Pozostaje udowodnić, że A_1A_{18} przechodzi przez P.

5. Udowodnię pomocniczo, że $|A_1P| = |A_1A_3|$.
   Zauważmy, że obrót o $6 \cdot 6^\circ$ przenosi OA_3 na OA_6, zaś A_{28} na A_1, więc z lematu wynika

   $$|A_1O| = |A_1A_6|$$

   Zauważmy, że $OA_6 || A_3A_{24} = A_3P$ oraz $\angle OA_6A_3 = \angle A_6OP = 12 \cdot 6^\circ$, więc czworokąt POA_6A_3 jest trapezem równoramiennym, punkt A_1 leży na symetralnej jednej jego podstawy, a więc leży także na symetralnej drugiej podstawy.

6. Skoro $|A_1P| = |A_1A_3|$ to

   $$\angle A_3A_1P = 180^\circ - 2\angle PA_3A_1 = 180^\circ - 14 \cdot 6^\circ = 16 \cdot 6^\circ = \angle A_3A_1A_{18}$$

   tak więc punkty A_1, P, A_{18} leżą na jednej prostej, co kończy dowód.