Dzień drugi

---

4. Czy istnieje liczba całkowita postaci

$$444\ldots4443$$

która jest podzielna przez 13?
Rozwiązanie:
Taka liczba nie istnieje.
Załóżmy, że $13|\underbrace{4\ldots4}_{k}3$.
Zachodzi $13|1\underbrace{4\ldots4}_{k}3 = 13\cdot\underbrace{1\ldots1}_{k+1}$, a więc

$$13|1\underbrace{4\ldots4}_{k}3 - \underbrace{4\ldots4}_{k}3 = 10^{k+1}$$

Sprzeczność.

5. Trójkąt ABC jest ostrokątny, a jego wysokości przecinają się w H. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABH, BCH, CAH mają równe promienie.

Lemat 1.1 *Odbicie ortocentrum w trójkącie względem dowolnego z boków leży na okręgu opisanym na trójkącie.*

Dowód lematu: Dowodzę tylko dla trójkąta ostrokątnego, dla innych dowód jest podobny.
Wprowadźmy oznaczenia jak w zadaniu i niech H' oznacza odbicie H względem boku AB (bez straty ogólności). Obliczam

$$\angle AH'B + \angle ACB = \angle AHB + \angle ACB = 180^\circ$$

co dowodzi tezy.
Rozwiązanie:
Niech o oznacza okrąg opisany na ABC.
Odbicia punktów A, B, H względem AB leżą na o. Tym samym punkty A, B, H leżą na okręgu będącym odbiciem symetrycznym o względem AB, co już dowodzi tezy.

6. Niech n będzie liczbą naturalną taką, że $\sqrt{1+12n^2}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że

$$2 + 2\sqrt{1+12n^2}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie:
Zauważmy, że liczba $\sqrt{1+12n^2}$ jest nieparzysta, gdyż jej kwadrat jest nieparzysty.
Rozważmy (*trik, trik :)*) równanie

$$x^2 - x - 3n^2 = 0$$

Równanie to ma pierwiastki

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+12n^2}}{2}$$

będące liczbami całkowitymi. Niech

$$x_0 := \frac{1+\sqrt{1+12n^2}}{2}, x_0 \in \mathbb{Z}$$

Teza orzeka, że $4x_0$ ma być kwadratem liczby całkowitej. Udowodnimy, że x_0 jest kwadratem liczby całkowitej, co już dowodzi tezy.

$$x_0^2 - x_0 - 3n^2 = 0, \quad x_0(x_0-1) = 3n^2$$

Liczby $x_0, x_0 - 1$ są względnie pierwsze i nieujemne, więc z rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$x_0 = 3k^2 \text{ i } x_0 - 1 = l^2 \text{ lub } x_0 = k^2 \text{ i } x_0 - 1 = 3l^2$$

Jeżeliby $x_0 - 1 = 3k^2$ i $x_0 - 1 = l^2$ to

$$3 | x_0 = l^2 + 1$$

czyli $l^2 \equiv 2 \mod 3$, sprzeczność, kwadraty nie dają takich reszt.
Ostatecznie $x_0 = k^2$ i $x_0 - 1 = 3l^2$, co dowodzi tezy.
Osobom zainteresowanym, czy istnieje dużo liczb naturalnych n takich, że $1 + 12n^2$ jest kwadratem liczby naturalnej, polecam poczytać o Równaniu Pella.