Dzień pierwszy

1. Czy jest możliwy podział zbioru $\{1, 2, \ldots, 33\}$ na jedenaście zbiorów 3-elementowych, tak, że w każdym zbiorze jeden z elementów jest równy sumie pozostałych dwóch?
   Rozwiązanie:
   Taki podział nie jest możliwy.
   Załóżmy, że mamy podział, spełniający warunki. Wtedy w każdym zbiorze suma liczb jest parzysta, a więc suma wszystkich liczb jest parzysta. Suma liczb $1, 2, \ldots, 33$ jest równa $17 \cdot 33$, a więc jest nieparzysta, sprzeczność.

2. Niech $\triangle ABC$ będzie prostokątny z $\angle ABC = 90°$ oraz $|AB| > |BC|$, niech Γ będzie półokręgiem o średnicy AB, który leży po tej samej stronie AB co punkt C. Niech P będzie punktem na Γ, takim, że $|BP| = |BC|$ i niech Q będzie punktem na AB takim, że $|AP| = |AQ|$. Udowodnij, że środek CQ leży na Γ.
   Rozwiązanie:
   Trójkąty $\triangle APQ$ i $\triangle BPC$ są równoramienne oraz
   $$\angle CBP = 90° - \angle PBA = \angle PAB$$
   tak więc $\triangle APQ \equiv \triangle BPC$.
   W szczególności $\angle APQ = \angle BPC$, a więc
   $$\angle CBQ + \angle QPC = 90° + \angle QPB + \angle BPC = 90° + \angle QPB + \angle APQ = 90° + \angle APB = 180°$$
   Tak więc punkty B, C, P, Q leżą na jednym okręgu, o środku O leżącym w połowie boku CQ. Obliczam
   $$\angle BOP + \angle PAB = 2\angle BCP + \angle CBP = 180°$$
   Punkty A, P, O, B leżą na okręgu o średnicy AB, środek odcinka CQ leży na okręgu o średnicy AB, a skoro leży on po tej samej stronie AB co punkt C, to leży on na Γ.

3. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ spełniające równanie
   $$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$
   dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$.
   Rozwiązanie:
   Dla skrótu złożenie funkcji f k razy będę oznaczać $f^{(k)}$.
   Po pierwsze, zauważmy, że funkcja f jest różnowartościowa:
   $$f(n) = f(m) \Rightarrow 3n = f(n) + f^{(2)}(n) + f^{(3)}(n) = f(m) + f^{(2)}(m) + f^{(3)}(m) = 3m$$
   Przez prostą indukcję udowodnię, że $f(k) = k$.

   (a) Dla $k = 1$:
   $$3 = f^{(3)}(1) + f^{(2)}(1) + f(1) \geq 1 + 1 + 1$$
   a więc zachodzą równości i $f(1) = 1$.

   (b) Krok indukcyjny.
   Zauważmy, że $f(k) \geq k$ gdyż f jest różnowartościowa. Stąd wynika $f^{(2)}(k) \geq k$, a następnie $f^{(3)}(k) \geq k$.
   $$3k = f(k) + f^{(2)}(k) + f^{(3)}(k) \geq k + k + k$$
   a więc zachodzą równości, w szczególności $f(k) = k$.