



Trochę zadań z finałów albo podobnych

KÓŁKO ILO BIAŁYSTOK
10 STYCZNIA 2012

Nie mamy 5 godzin, stąd są wskazówki do zadań.

ZADANIE 1

W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB , a punkt M jest środkiem odcinka CE . Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC, BC odpowiednio w punktach K, L . Dowieść, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

Wskazówka: popatrz na prostą równoległą do AB i przechodzącą przez M i na jej punkty przecięcia z bokami trójkąta, rozważ to jako szczególny przypadek.

Źródło: 58 OM, etap 3, zadanie 1.

ZADANIE 2

W każdy kwadrat nieskończonej (we wszystkich kierunkach) szachownicy należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, aby każda wpisana liczba wystąpiła raz i była średnią arytmetyczną liczb sąsiadujących z nią bokiem. Czy jest to możliwe?

Źródło: prawie 58 OM, etap 3, zadanie 3.

ZADANIE 3

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3. \end{cases}$$

Wskazówka: rozważ liczbę największą (układ jest cykliczny, można założyć, że to np. b i udowodnij, że liczba d jest jej równa).

Źródło: prawie 57 OM, etap 3, zadanie 1.