Kółko 27.10 - Dirichlet

Teoria:

1. Dirichlet jest wszędzie, nawet tam, gdzie się go nie spodziewasz... Bądź ostrożny, żeby Cię nie dopadł :)
2. **Twierdzenie 0.1 (Zasada szufladkowa, Dirichleta, gniazd gołębich ...)** *Jeżeli mamy $n+1$ przedmiotów i n szufladek i wkładamy przedmioty do szufladek, to w pewnej szufladce będą 2 przedmioty.*
3. Inne często używane sformułowanie: Jeżeli mamy n przedmiotów i n szufladek i wkładamy przedmioty do szufladek tak, że w żadnej szufladce nie ma więcej niż jednego przedmiotu, to **każda** szufladka jest niepusta.
4. **Twierdzenie 0.2 (Zasadnicze twierdzenie arytmetyki :p)** *Jeżeli $a|bc$ i a jest względnie pierwsze z b, to $a|c$.*

Zadanka: Wszystkie liczby są **całkowite**, a w większości również dodatnie.

1. Z obozu dla przypomnienia: W turnieju szachowym startuje $n \geq 2$ zawodników. Każda para rozgrywa dokładnie jeden mecz. Udowodnić, że w każdej chwili turnieju istnieje 2 graczy, którzy rozegrali (do końca) po tyle samo partii.
2. Niech $a_1, a_2, \cdots, a_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieją takie $1 \leq k \leq l \leq n$, że $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$ jest podzielne przez n. (link z mathlinks)
3. Udowodnij, że dla dowolnego a niepodzielnego przez p (p - pierwsze), w ciągu liczb $0, a, 2a, \cdots, (p-1)a$ istnieje liczba dająca resztę 1 z dzielenia przez p.
4. Udowodnij chińskie twierdzenie o resztach, czyli dowiedź, że jeśli n, m są względnie pierwsze (i dodatnie), to dla dowolnych a, b istnieje takie x, że $x \equiv a \pmod{n}$ i $x \equiv b \pmod{m}$.(mathlinks)
5. Udowodnij „słabsze twierdzenie Fermata": dla danej liczby pierwszej p i dodatniej liczby a istnieje takie n, $2 \leq n \leq p$, że $p|a^n - a$.
6. Kozik przygotowuje się do OI. Załatwił sobie zwolnienie na 11 tygodni (!!!). W tym czasie zamierza dziennie robić co najmniej 1 zadanko, ale w każdym pełnym tygodniu nie zrobić więcej niż 12 zadanek (żeby się nie przemęczać). Udowodnij, że istnieją takie a, b, że od dnia a do dnia b (włącznie) Kozik rozwiązał dokładnie 21 zadań. (mathlinks)
7. Danych jest 6 punktów o współrzędnych całkowitych na płaszczyźnie. Udowodnić, że środek pewnego odcinka o końcach w tych punktach ma współrzędne całkowite.
8. W trójkącie równobocznym o boku 12 umieszczono 300 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że pewne 3 z nich tworzą trójkąt o polu mniejszym niż $\frac{1}{2}$ i obwodzie niewiększym niż 3. (staszic)
9. (*) Niech $A = \{(a_1, a_2, \cdots, a_8) | 1 \leq a_i \leq 1 + i\}$ i niech podzbiór $X \subset A$ będzie nazywany endrjusuperowym, jeżeli dla każdych różnych ósemek $(a_1, \cdots, a_8), (b_1, \cdots, b_8) \subset X$ co najmniej trzy liczby z ósemek są różne, tj. istnieją takie i, j, k, $1 \leq i < j < k \leq 8$, że $a_i \neq b_i$, $a_j \neq b_j$, $a_k \neq b_k$. Wyznaczyć największą ilość elementów, jaką może mieć zbiór endrjusuperowy.