Analiza matematyczna

Została mała przyjemność – przejdźmy do granicy.
dr M. Bobieński (wykładowca AM)

Teoria

1. *Poniższa definicja jest wprowadzona dla porządku – nie mam szans (ani chęci) rozwijać w 1,5h całej teorii granic i pochodnych.*

   Definicja 1.1 *Jeżeli dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz ustalony jest punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, to* ***pochodną*** *funkcji f nazywamy funkcję*
$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
   dla sensownych funkcji ta pochodna istnieje.
   Funkcje, które mają pochodną ciągłą (mniejsza co to znaczy) nazywamy ***różniczkowalnymi****, wszystkie sensowne funkcje są różniczkowalne.*

2. Geometrycznie wartość pochodnej w punkcie $f'(x_0)$ interpretuje się jako współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu f w punkcie x_0.

3. **Definicja 1.2** *Określamy drugą pochodną funkcji f jako pochodną pochodnej funkcji f, co oznaczamy (o dziwo) f'', trzecią pochodną jako pochodną drugiej pochodnej i tak dalej. Ogólniej n-tą pochodną oznaczamy $f^{(n)}$.*

   Oczywiście mówimy tutaj o przypadku, gdy pochodne istnieją.

4. Mała tabelka pochodnych:

Funkcja	Pochodna	
funkcja stała	0	
x	1	
x^n	nx^{n-1}	dla $n \in \mathbb{R}, n \neq 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	

   Liczba $e \approx 2,7182$ jest straszliwie ważną stałą w matematyce i fizyce, ln oznacza logarytm (patrz wikipedia) o podstawie e.
   Uwaga o sin: Wszędzie w tym tekście (jak i wszędzie indziej) $\sin x$ oznacza sinus x w radianach, nie stopniach! $\pi\ rad = 180°$. To samo tyczy się pozostałych funkcji trygonometrycznych.

5. Zachodzą mądre wzory na sumę, różnicę, iloczyn oraz iloraz pochodnych. Weźmy funkcje różniczkowalne f, g i niech f', g' oznaczają ich pochodne, niech $c \in \mathbb{R}$ oznacza stałą. Wtedy:

$$\begin{aligned} (cf)' &= cf' \\ (f+g)' &= f' + g' \\ (f-g)' &= f' - g' \\ (fg)' &= fg' + f'g \\ (\tfrac{f}{g})' &= \tfrac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{ma sens jeżeli } g(x) > 0\ \forall_{x \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

6. **Twierdzenie 1.3** *Dana jest funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Jeżeli punkt* x_0 *jest minimum lokalnym (tj. istnieje* $\varepsilon > 0$*, taki, że dla* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $f(x) \geq f(x_0)$*).*

$$f'(x_0) = 0$$

Teza zachodzi również, gdy x_0 *jest maksimum lokalnym.*

Teoria do funkcji wypukłych

1. **Twierdzenie 1.4 (Rolle)** *Jeżeli* f *jest różniczkowalna,* $a < b$ *są liczbami rzeczywistymi oraz* $f(a) = f(b)$ *to*

$$\textit{Istnieje } c \in (a, b)\ f'(c) = 0$$

2. **Twierdzenie 1.5 (Lagrange)** *Jeżeli* f *jest różniczkowalna zaś* $a < b$ *są liczbami rzeczywistymi to*

$$\textit{Istnieje } c \in (a, b)\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dowód:
Niech $g(x) := f(x) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Wtedy

$$g(a) = f(a),\ g(b) = f(b) - (b - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) = g(a)$$

Stosujemy tw. Rolle dla funkcji g i punktów a, b otrzymując

$$\text{Istnieje } c \in (a, b)\ g'(c) = 0$$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \left((x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zauważmy, że tw. Rolle jest wnioskiem z tw. Lagrange, "wąż zjada własny ogon".

3. **Wniosek 1.6** *Ustalmy* $a < b \in \mathbb{R}$ *oraz funkcję różniczkowalną* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Jeżeli $f'(x) \geq 0$ *dla wszystkich* $x \in (a, b)$ *to funkcja* f *jest niemalejąca na przedziale* (a, b).

Dowód:
Weźmy dowolne $c, d :\ a \leq c < d \leq b$. Z tw. Lagrange wiemy, że

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(s)$$

gdzie s jest pewnym punktem (c, d). Wiemy, że $d - c > 0$ i $f'(s) \geq 0$, stąd $f(d) - f(c) \geq 0$.

4. Funkcja jest *wypukła* na przedziale $[a, b]$, jeżeli dla wszystkich $c, d \in [a, b]$ odcinek $(c, f(c)) - - - (d, f(d))$ leży ponad wykresem funkcji f.

5. Podstawowym faktem dotyczącym funkcji wypukłych jest

Twierdzenie 1.7 (Nierówność Jensena) *Jeżeli funkcja* f *jest wypukła na przedziale* $[c, d]$, $x_1, \ldots, x_n \in [c, d]$*, liczby* $a_1, \ldots, a_n > 0$ *oraz* $a_1 + \cdots + a_n = 1$ *to*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

6. **Wniosek 1.8** *Ustalmy* $a < b \in \mathbb{R}$. *Jeżeli funkcja* f *jest różniczkowalna i jej pochodna jest różniczkowalna oraz* $\forall_{x \in (a,b)}\ f''(x) \geq 0$ *to funkcja* f *jest wypukła (i możemy stosować nierówność Jensena:).*
Uwaga: *Jeżeli mamy mocniejszą nierówność* $f'' > 0$*, to równość w nierówności Jensena zachodzi tylko, gdy* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Zadania na pochodne

1. Dla liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ pokazać nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

   bez użycia Jensena, za to z użyciem pochodnych.

2. Uzasadnić, że dla $x \in [0, \pi/2]$ zachodzi

$$x\frac{2}{\pi} \leq \sin x \leq x$$

3. Liczby x, y, z są nieujemne i sumują się do $\pi/2$. Pokazać, że

$$1 \leq \sin x + \sin y + \sin z \leq \frac{\pi}{2}$$

   por. zadanie 1. z Jensena.

4. Obliczyć maksimum funkcji $x^{1/x}$ dla $x \in [1, \infty)$.

5. Udowodnić, że dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \geq 0$ zachodzi

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

   Na AM udowadnia się, że $e^x = \lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2/2 + \cdots + x^n/n!$.

Zadania z Jensena

1. Liczby x, y, z są nieujemne i sumują się do $\pi/2$. Pokazać, że

$$\sin x + \sin y + \sin z \leq \frac{3}{2}$$

2. Dla liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ pokazać nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$