$1, 2, 3, \ldots, \infty$

co warto wiedzieć, żeby nie czuć się źle na kółku

kółko I LO Białystok

20 stycznia 2013

Wersja 0.44 [beta]

Zadania z poniższego zbioru pochodzą z najrozmaitszych miejsc; o ile wiem większość z nich jest "znana", niestety nie będę podawać przy zadaniach źródeł.

Po co te materiały?

Ten mały zbiorek ma służyć do tego, żeby impreza rozkręcała się, niezatrzymywana przez braki w zaopatrzeniu w fakty matematyczne. Zawiera on trochę zadań oraz twierdzenia, stwierdzenia i lematy z dowodami. Zadania są wyabstrahowane dobrane jako proste lecz kluczowe obserwacje z zadań olimpijskich i dowodów.

Po kiego czytać dowody? Dowód to po pierwsze sprawdzenie, że rozumowanie nie ma luk, a po drugie uporządkowanie go tak, by ktoś inny mógł je zrozumieć i powtórzyć w przyszłości w innych warunkach. Patrząc na analogię z informatyką, kod: `for(int i=0; i<10; i++){ printf(‘‘Hello math!’’); }` wypisze dziesięć razy `Hello math!`. O ile wie się, jak działa pętla; to zmodyfikowanie kodu, by wypisał liczby od 0 do 9 jest natychmiastowe, jeżeli natomiast kod jest rozumiany tylko na poziomie `TEN_NAPIS_WYKONUJE_10_RAZY { printf(‘‘Hello math!’’);}` to jest to trudne. Tak samo zrozumienie dowodu twierdzenia pozwala udowodnić tysiące twierdzeń różniących się szczegółami, natomiast znajomość treści pozwala jedynie zastosować to jedno twierdzenie (i wtedy szybko zapomina się, jakie były warunki w sformułowaniu twierdzenia ;).

Materiały zawiera najczęściej używane na kółku fakty. To niestety (czy na szczęście) nie znaczy, że te fakty są oczywiste. Gdybyś miał(a) problemy ze zrozumieniem treści czy dowodu twierdzenia napisz do Jogiego lub spytaj kogoś z kółka.

1 Algebra

Stwierdzenie 1.1 (Wzory skróconego mnożenia). *Jeżeli a, b są liczbami rzeczywistymi a n jest liczbą całkowitą dodatnią to*

1.
$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}).$$

2. Jeżeli n jest nieparzyste to również
$$a^n + b^n = (a+b)\cdot(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}).$$

Uwaga: stwierdzenie działa również w przypadkach, gdy a, b są liczbami całkowitymi, wymiernymi, zespolonymi, wielomianami, funkcjami, w zasadzie czymkolwiek co da się dodać, odjąć i pomnożyć.

Dowód. Pozostawiamy czytelnikowi (w przypadku liczb całkowitych). □

Zadanie 1. Uzasadnij, że jeśli $p > 2$ jest pierwsza, to $17 \big| 13^p + 4^p$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli liczba całkowita dodatnia M dzieli $a - b$ to $M^2 \big| a^M - b^M$.

Wskazówka: trzeba zastosować wzór i udowodnić, że M liczb z nawiasu (którego?) daje tę samą resztę.

Zadanie 3. Liczby a, N są całkowite dodatnie, przy czym $a > 1$. Uzasadnij, że jeśli $a^N + 1$ jest pierwsza, to N jest potęgą dwójki.

Stwierdzenie 1.2 (Wzór dwumianowy Newtona). *Jeżeli a, b są liczbami rzeczywistymi, zaś n jest całkowite dodatnie to*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n, \text{ gdzie } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

przyjmujemy tutaj, że $0! = 1$.

Dowód. Dla tak zdefiniowanych $\binom{n}{k}$ i dla $1 \leqslant k \leqslant n-1$ zachodzi równość

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

patrz współczynniki dwumianowe w kombinatoryce, w szczególności zadanie 39.

Dla $n = 1$ wzór przyjmuje postać $a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$, jest więc prawdziwy.

Załóżmy, że udowodniliśmy wzór dla $1, 2, \ldots, n-1$ i chcemy go dowieść dla n. Zapisujemy

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)^{n-1} = (a+b)\cdot\left(\binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b + \ldots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}\right) =$$

$$\binom{n-1}{0}a^n + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b + \binom{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n-1}{n-1}ab^{n-1} +$$

$$+ \binom{n-1}{0}a^{n-1}b + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n-1}{n-2}ab^{n-1} + \binom{n-1}{n-1}b^n.$$

Po zsumowaniu prawej strony otrzymujemy równość z tezy dla n.

□

Zadanie 4. Uzasadnij, że jeśli p jest pierwsze a $1 \leqslant k \leqslant p-1$ całkowite to $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p. Wywnioskuj, że jeśli x jest całkowite, to $(1+x)^p = 1 + x^p + pk$ dla pewnego k całkowitego.

Zadanie 5. Uzasadnij, że

1. jeśli n jest liczbą całkowitą nieujemną, to

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

2. jeżeli n jest całkowita dodatnia, to

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

Wskazówka: w pierwszym podpunkcie rozważ wyrażenie $(1+1)^n$.

2 Teoria liczb

Teorię liczb, choć babra się z niewymiernymi, w praktyce uprawia się dla liczb całkowitych. Kluczowe jest pojęcie *dzielnika*: dla danych całkowitych a, b mówimy, że "*b jest dzielnikiem a*" lub "*b dzieli a*" lub "*a jest podzielne przez b*" jeżeli istnieje takie c całkowite, że $a = b \cdot c$. Zapisujemy to $b \big| a$. Przykładowo liczby $1, -1$ są dzielnikami dowolnej liczby całkowitej.

Liczbę p nazywamy *pierwszą*, jeżeli jedyne jej dzielniki dodatnie to 1 i p (przy czym $p \neq 1$).

Uwaga: domyślnie w tym paragrafie wszystkie zmienne są liczbami całkowitymi.

Stwierdzenie 2.1 (Zasadnicze twierdzenie arytmetyki)**.** *Każdą liczbę całkowitą dodatnią można jednoznacznie zapisać jako iloczyn liczb pierwszych.*

Wniosek 2.2. *Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi, $a \neq 0$. Jeżeli liczby a i b nie mają wspólnego dzielnika większego od 1 i zachodzi $a \big| bc$ to $a \big| c$.*

Szkic dowodu. Wypisujemy rozkłady na czynniki pierwsze a, b, c. Każda liczba pierwsza p, która występuje w rozkładzie a nie występuje w rozkładzie b, a występuje w rozkładzie $b \cdot c$ i to w potędze nie mniejszej; wynika stąd, że p występuje w rozkładzie c i to w potędze nie mniejszej (niż w rozkładzie a). Teraz można wprost wypisać iloraz c/a. □

2.1 Kongruencje

Kongruencje pozwalają zredukować pytanie o rozwiązanie równania w liczbach całkowitych do pytania o rozwiązanie w zbiorze skończonym(!!) reszt z dzielenia przez n, gdzie można mniej lub bardziej brutalnie sprawdzić wszystkie przypadki.

Definicja 2.3. *Mówimy, że a przystaje do a' modulo n, jeżeli liczby a, a' dają taką samą resztę z dzielenia przez n, innymi słowy, gdy $n \big| a - a'$. Oznaczamy tę sytuację $a \equiv a' \mod n$.*

Po pierwsze zachodzą "sensowne" własności

1. *jeżeli $a \equiv a' \mod n$, to $a' \equiv a \mod n$,*
2. *jeżeli $a \equiv a' \mod n$ i $a' \equiv a" \mod n$, to $a \equiv a" \mod n$.*

Co więcej, jeżeli $a \equiv a' \mod n$ oraz $b \equiv b' \mod n$ zaś c jest dowolną liczbą całkowitą, to

1. *$a + b \equiv a' + b' \mod n$,*
2. *$a - b \equiv a' - b' \mod n$,*
3. *$a \cdot b \equiv a' \cdot b' \mod n$, w szczególności $c \cdot a \equiv c \cdot a' \mod n$,*
4. *$a^m \equiv (a')^m \mod n$, dla każdego m naturalnego, np. $a^2 \equiv (a')^2 \mod n$.*
   W szczególności jeżeli $a^m \equiv 1 \mod n$ to $a^{m \cdot m'} \equiv 1 \mod n$ dla każdego m' całkowitego dodatniego,
5. *jeżeli liczby c i n są względnie pierwsze to $cx \equiv cy \mod n$ implikuje $x \equiv y \mod n$.*

Szkic dowodu własności. Większość jest prosta, udowodnimy te niebanalne, poczynając od własności 3.

Skoro $n \big| a - a'$ i $n \big| b - b'$ to $n \big| b(a - a') + a'(b - b') = ab - a'b'$, czyli $ab \equiv a'b' \mod n$. Skoro $c \equiv c \mod n$ to w szczególności $c \cdot a \equiv c \cdot a' \mod n$.

Jako drugi przykład udowodnimy własność 5. Skoro $cx \equiv cy \mod n$, to $n \big| cx - cy = c(x - y)$, więc $n \big| x - y$, stąd $x \equiv y \mod n$.

Spróbuj udowodnić własność 4, korzystając z 3. □

O kongruencjach dobrze myśleć jako o "równości" liczb z pewną dokładnością.

Zadanie 6. Oblicz ostatnią cyfrę liczby 3^{64}.

Zadanie 7. Oblicz, jakie reszty z dzielenia przez 7 mogą dawać sześciany liczb całkowitych, a jakie kwadraty liczb całkowitych. Dowiedź, że jeśli a, b są całkowite i $7 \big| a^2 + b^2$ to $7 \big| a$ i $7 \big| b$.

Wskazówka: zauważ, że reszta z dzielenia przez n sześcianu liczby całkowitej zależy tylko od reszty z dzielenia przez n tej liczby, sprawdź wszystkie reszty.

Zadanie 8. Pokaż, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $2^{4^n} + 5$ jest podzielna przez 21.

Wskazówka: $16^4 \equiv 16 \mod 21$ – *sprawdź to!*

Zadanie 9. Dowiedź, że jeśli $a^2 + b^2 = c^2$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c to co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3. Zrób to samo zadanie z 3 zastąpionym przez 4 a potem przez 5 (*dla sześciu już nie działa ;).*

Zadanie 10. Dowiedź, że liczba n daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, jak suma cyfr n.

Wskazówka: zauważ, że $10^n \equiv 1 \mod 9$.

2.2 Kongruencje modulo liczba pierwsza

Stwierdzenie 2.4. *Załóżmy, że liczby całkowite a i b są względnie pierwsze, tzn. nie mają wspólnych dzielników większych od 1.*

Wtedy liczby ze zbioru $\mathcal{A} = \{0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (b-1) \cdot a\}$ dają parami różne reszty z dzielenia przez b i jednocześnie wszystkie reszty z dzielenia przez b.

Dowód. Udowodnijmy najpierw, że liczby ze zbioru $\mathcal{A}$ dają różne reszty z dzielenia przez b. Załóżmy, że liczby ka, la dają tę samą resztę, gdzie $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant b-1$, wtedy $ka \equiv la \mod b$, a skoro a i b są względnie pierwsze, to $k \equiv l \mod b$, czyli $b \big| l - k$. Skoro $0 \leqslant l - k \leqslant b - 1$, to znaczy, że $l - k = 0$.

Skoro zbiór $\mathcal{A}$ zawiera b liczb, dających b różnych reszt a łącznie jest b reszt, to każda reszta jest resztą liczby ze zbioru $\mathcal{A}$. □

Wniosek 2.5 (Istnienie odwrotności $\mod p$)**.** *Jeżeli p jest pierwsza, a liczba a jest niepodzielna przez p, to istnieje takie b, że $ba \equiv 1 \mod p$, jednoznacznie wyznaczone $\mod p$. Liczbę $b \mod p$ nazywamy odwrotnością liczby $a \mod p$.*

Dowód. Zbiór liczb $\{0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a\}$ zawiera wszystkie reszty z dzielenia przez p, w szczególności resztę 1 i to dokładnie raz. □

Stwierdzenie 2.6 (Małe twierdzenie Fermata). *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, a a jest liczbą całkowitą to*
$$a^p \equiv a \mod p.$$
Jeżeli dodatkowo a jest niepodzielna przez p to $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

I dowód. Załóżmy najpierw, że a jest niepodzielna przez p.

Oczywiście $0 \cdot a = 0$. Zbiór $\{1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, (p-1) \cdot a\}$ daje więc, ze stwierdzenia 2.4, wszystkie niezerowe reszty z dzielenia przez p, każdą dokładnie raz. Wobec tego iloczyn liczb z tego zbioru $\mod p$ wynosi $(p-1)! \mod p$:
$$(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \cdot a) \equiv (p-1)! \mod p$$
Skoro $(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \cdot a) = (p-1)! \cdot a^{p-1}$, to $(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \mod p$. Dzieląc przez $(p-1)!$ stronami otrzymujemy $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Stąd wynika także $a^p \equiv a \mod p$.

Jeżeli a była podzielna przez p to $a \equiv 0 \mod p$, więc $a^p \equiv 0 \equiv a \mod p$. □

II dowód. Zależność $a^p \equiv a \mod p$ jest prawdziwa dla $a = 0$. Udowodnimy, że jeśli jest ona prawdziwa dla $a = n$ to jest prawdziwa również dla $a = n + 1$ oraz $a = n - 1$, co pokaże, że $a^p \equiv a \mod p$ jest prawdziwa dla każdego a całkowitego.

Z zadania 4 z części algebraicznej wynika, że $(x+1)^p \equiv x^p + 1 \mod p$. Wobec tego jeśli $(x+1)^p \equiv x+1 \mod p$ to $x^p \equiv x + 1 - 1 = x \mod p$ oraz jeśli $x^p \equiv x \mod p$ to $(x+1)^p \equiv x + 1 \mod p$. To dowodzi szukanych zależności i pokazuje, że $a^p \equiv a \mod p$, dla każdej liczby całkowitej a.

Jeżeli a jest niepodzielna przez p to liczby a i p są względnie pierwsze, więc $a \equiv a \cdot a^{p-1} \mod p$ implikuje $1 \equiv a^{p-1} \mod p$. □

Zadanie 11. Oblicz, jakie reszty z dzielenia przez 5 dają czwarte potęgi liczb całkowitych.

Zadanie 12. Udowodnij, że jeśli a jest względnie pierwsza z liczbą 105, to $105 \big| a^{12} - 1$.

Wskazówka: rozważ osobno podzielności przez $3, 5, 7$.

Zadanie 13. Uzasadnij, że $a^{2p-1} \equiv a \mod p$ dla dowolnej liczby całkowitej a i liczby pierwszej p.

Zadanie 14. *Zadanie o* $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$.

Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Uzasadnij, że $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2}$ daje resztę 1 z dzielenia przez p.

Wskazówka: pomnóż liczbę przez 6. *Czy po rozwiązaniu rozumiesz, dlaczego nazywa się to zadaniem o* $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$*?*

2.3 Wśród n kolejnych liczb istnieje podzielna przez n.

Zadanie 15. Liczby $p, 2p + 1$ i $4p + 1$ są pierwsze. Wykaż, że $p = 3$.

Wskazówka: Dwa sposoby: odpowiednie modulo, lub liczby $4p, 4p + 1, 4p + 2$.

2.4 Zasada minimum.

Czasami z jednego rozwiązania danego równania da się wydobyć inne "mniejsze" rozwiązanie. Wtedy opłaca się wziąć "najmniejsze" rozwiązanie.

Zadanie 16. Udowodnij, że równanie $x^2 + y^2 = 3z^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych innych, niż $x = y = z = 0$.

Szkic rozwiązania

Załóżmy, że istnieją rozwiązania z $\max(|x|, |y|, |z|) > 0$; wybierzmy rozwiązanie (x_0, y_0, z_0) z najmniejszym $\max(|x|, |y|, |z|) > 0$ (liczba ta jest całkowita, więc możemy).

Udowadniamy, że, dla dowolnych x, y, jeśli $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod 3$, to $x \equiv y \equiv 0 \mod 3$. Wobec tego $x_0 = 3 \cdot x_1, y_0 = 3 \cdot y_1$ i równanie przyjmuje postać
$$9 \cdot (x_1^2 + y_1^2) = 3z_0^2.$$
Wynika z tego, że $3 \big| z_0$, czyli $z_0 = 3z_1$ i skracając przez 9 otrzymujemy równanie $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$. A więc (x_1, y_1, z_1) jest rozwiązaniem wyjściowego równania i zachodzi
$$\max(|x_1|, |y_1|, |z_1|) = 1/3 \cdot \max(|x_0|, |y_0|, |z_0|) < \max(|x_0|, |y_0|, |z_0|).$$

To daje sprzeczność z definicją (x_0, y_0, z_0), więc dowodzi, że każde rozwiązanie spełnia $\max(|x|, |y|, |z|) = 0$, czyli $x = y = z = 0$.

Pytanie na koniec: w którym miejscu korzystamy z założenia $\max(|x_0|, |y_0|, |z_0|) > 0$*?*

Zadanie 17. Uzasadnij, że $x^2 + y^2 = 7z^2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y, z.

Zadanie 18. Dowiedź, że równanie $x^5+2y^5+4z^5+8t^5 = 16A^5$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z, t, A innych niż $x = y = z = t = A = 0$.

2.5 Zasada szufladkowa Dirichleta

Stwierdzenie 2.7 (Jeden z wariantów Zasady)**.** *Wśród $n+1$ liczb istnieją dwie dające tę samą resztę z dzielenia przez n.*

Zadanie 19. Udowodnij, że dla dowolnej liczby n istnieje liczba postaci $111\ldots11000\ldots0$ podzielna przez n. Uzasadnij, że jeśli n była względnie pierwsza z 10, to istnieje liczba postaci $111\ldots1$ podzielna przez n.

Wskazówka: rozważ liczby $1, 11, 111, \ldots, 1111\ldots1$.

Zadanie 20. Dany jest ciąg (a_n) liczb naturalnych długości N. Uzasadnij, że suma pewnego jego podciągu spójnego jest podzielna przez N.

Wskazówka: rozważ $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots$

Zadanie 21. Liczby a i n są względnie pierwsze. Uzasadnij, że pewna potęga a daje resztę 1 z dzielenia przez n.

Wskazówka: rozważ potęgi $1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n$.

3 Geometria

Tutaj twierdzeń jest najwięcej, co chyba jest powodem, że geometria jest uważana za trudną :) Dużo więcej niż w innych działach jest też faktów, o których zakładam, że są prawdziwe.

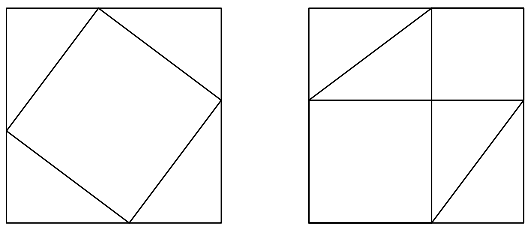
Konwencja podobieństw: piszemy, że trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ są *podobne* jeżeli zachodzą równości $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$ i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$. Zapisujemy to $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Chodzi o to, że znaczenie ma tutaj kolejność wierzchołków! Podobnie dla przystawania.

3.1 Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie 3.1 (Twierdzenie Pitagorasa)**.** *Jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny z kątem prostym $\sphericalangle ABC$, to $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$.*

Dowód.

Oznaczmy $a := |BC|, b := |AC|, c := |AB|$. Z czterech trójkątów przystających do $\triangle ABC$ oraz kwadratu o boku b można złożyć kwadrat o boku $a + c$; patrz rys. Taki sam kwadrat można też złożyć z kwadratu o boku a, kwadratu o boku c i czterech trójkątów przystających do $\triangle ABC$; patrz rys. Porównanie pól daje $a^2 + c^2 = b^2$.



□

Zadanie 22. Dany jest czworokąt $ABCD$ i punkt X. Udowodnij, że jeżeli $ABCD$ jest prostokątem to

$$AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2.$$

3.2 Twierdzenie Talesa

Twierdzenie 3.2 (Twierdzenie Talesa i odwrotne)**.** *Jeżeli <u>półproste</u> k i l mają wspólny początek w punkcie P, prosta m_1 przecina k, l w K_1, L_1 odpowiednio (i punkty te są różne od P), prosta m_2 przecina k, l w K_2, L_2 odpowiednio (i punkty te są różne od P) to* *prosta m_1 jest równoległa do m_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\triangle PK_1L_1$ jest podobny do $\triangle PK_2L_2$, co dzieje się wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{PK_1}{PL_1} = \frac{PK_2}{PL_2}$.*

Uwaga: przypominam, że przy pisaniu podobieństw ma znaczenie kolejność — kąty przy odpowiednich wierzchołkach są równe.

Szkic dowodu. Cechy podobieństwa bok-kąt-bok i kąt-kąt-kąt. □

Zadanie 23. Udowodnij, że czworokąt wypukły $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy punkt przecięcia przekątnych jest środkiem każdej z przekątnych.

3.3 Kąty wpisane i środkowe

Konwencja: kiedy mówimy, że kąt wpisany $\sphericalangle ABC$ jest oparty na łuku AC, mamy na myśli łuk AC niezawierający punktu B.

Twierdzenie 3.3. *Niech* **o** *będzie okręgiem o środku O. Jeżeli $\sphericalangle ABC$ jest kątem wpisanym w okrąg* **o** *opartym na łuku ℓ a $\sphericalangle AOC$ jest kątem środkowym opartym na tym łuku, to*

$$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AOC.$$

Szkic dowodu. Podamy rozumowanie w przypadku, gdy O leży wewnątrz trójkąta ABC, pozostałe przypadki są podobne. Skoro $AO = BO = CO$, to trójkąty AOB, BOC, COA są równoramienne. Obliczamy

$$\sphericalangle AOC = 180^\circ - 2\sphericalangle OCA = 2\cdot(\sphericalangle OAB + \sphericalangle OBC + \sphericalangle OCA) - 2\sphericalangle OCA = 2\cdot(\sphericalangle OBA + \sphericalangle OBC) = 2\cdot\sphericalangle ABC.$$

□

Wniosek 3.4 (Równość kątów wpisanych). *Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.*

Zadanie 24. Pokaż, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg to $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$.

Zadanie 25. *Twierdzenie o kącie wpisanym i dopisanym* Odcinek AC jest styczny do okręgu o w punkcie A. Punkt B leży na o, a punkt D leży na o po innej stronie prostej AB niż C. Uzasadnij, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAC$.

Wskazówka: stosując poprzednie zadanie możesz zredukować się do przypadku, gdy $\sphericalangle BAC \leqslant 90^\circ$. Stosując równość katów wpisanych możesz wtedy założyć że AD jest średnicą (tutaj potrzebne Ci będzie $\sphericalangle BAC < 90^\circ$).

3.4 Okrąg opisany na trójkącie

Lemat 3.5 (Definicja symetralnej). *Ustalmy różne punkty na płaszczyźnie A, B. Zbiór punktów X równoodległych od A i B jest prostą prostopadłą do odcinka AB przechodzącą przez jego środek. Nazywamy ją* symetralną *AB.*

Dowód. Ustalmy punkt X na płaszczyźnie i zrzutujmy go na prostą AB, otrzymując punkt H. Równość $AX = BX$ jest równoważna $AX^2 = BX^2$, czyli $AH^2 + XH^2 = BH^2 + XH^2$, czyli $AH^2 = BH^2$ czyli $AH = BH$. Jedynym punktem prostej AB spełniającym tę zależność jest środek odcinka AB.

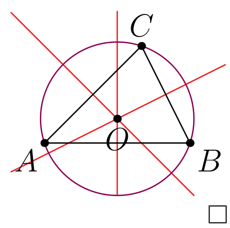
Dowodzi to, że X należy do zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy jego rzutem jest środek odcinka AB. □

Wniosek 3.6 (Istnieje dokładnie jeden okrąg opisany na trójkącie). *Dla danych punktów A, B, C na płaszczyźnie nie leżących na jednej prostej istnieje dokładnie jeden punkt O taki, że $AO = BO = CO$.*

Punkt ten jest przecięciem trzech(!) prostych będących symetralnymi odcinków AB, BC, CA.

Dowód.

Jeżeli punkt O jest równoodległy od A, B, C to leży on na każdej z symetralnych, więc taki punkt O istnieje co najwyżej jeden.
Skoro punkty A, B, C nie są współliniowe, to symetralne AB i BC nie są równoległe, więc przecinają się w punkcie X spełniającym warunki $AX = BX$ i $BX = CX$ (tu korzystamy z lematu 3.5), więc również $AX = CX$; punkt X spełnia warunki na szukany punkt O.



□

Zadanie 26. *Deltoid* to czworokąt wypukły $ABCD$ taki, że $AB = BC$ i $AD = CD$. Udowodnij, że przekątne w deltoidzie przecinają się pod kątem prostym.

Zadanie 27. Udowodnij, że środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środek przeciwprostokątnej.

3.5 Okrąg wpisany

Lemat 3.7 (Definicja dwusiecznej)**.** *Weźmy kąt ABC. Zbiór punktów X leżących wewnątrz kąta ABC których odległość od prostej AB jest równa odległości od prostej BC jest półprostą przechodzącą przez B i tworzącą równe kąty z prostymi AB i BC. Prostą tę nazywamy* dwusieczną kąta ABC.

Szkic. Weźmy dowolny punkt X wewnątrz kąta ABC i rozważmy rzuty X_A, X_C punktu X na proste BA, BC. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $BX_A = \sqrt{BX^2 - XX_A^2}$, $BX_C = \sqrt{BX^2 - XX_C^2}$ więc trójkąty BXX_A, BXX_C są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy $XX_A = XX_C$.

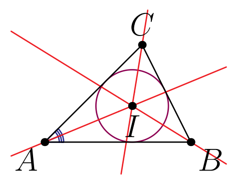
Z drugiej strony jeżeli $\sphericalangle XBX_A = \sphericalangle XBX_C$ to z cechy kkk trójkąty BXX_A, BXX_C są podobne więc i przystające jako mające wspólny bok BX. To dowodzi, że BXX_A, BXX_C są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle XBX_A = \sphericalangle XBX_C$.

Reasumując, odległości punktu X od BA, BC są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle XBX_A = \sphericalangle XBX_C$ a to dzieje się wtedy i tylko wtedy, gdy X leży na dwusiecznej kąta ABC. ☐

Wniosek 3.8 (Istnieje dokładnie jeden okrąg wpisany)**.** *Niech ABC będzie trójkątem. Istnieje dokładnie jeden punkt I leżący wewnątrz $\triangle ABC$, którego odległości od prostych AB, BC i CA są równe. Punkt ten nazywamy* środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$.

Dowód.

Punkt I spełniający warunki zadania musi leżeć na dwusiecznych kątów $\sphericalangle ABC, \sphericalangle BCA, \sphericalangle CAB$, więc istnieje co najwyżej jeden. Dwusieczna kąta $\sphericalangle ABC$ tworzy z prostą BC kąt $\sphericalangle ABC/2$, a dwusieczna kąta $\sphericalangle BCA$ tworzy kąt $\sphericalangle BCA/2$. Skoro $\sphericalangle ABC/2 + \sphericalangle BCA/2 < (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB)/2 = 90°$, to proste te nie są równoległe (dlaczego?) więc przecinają się w pewnym punkcie X. Oznaczmy jego odległości od AB, BC, CA przez d_{AB}, d_{BC}, d_{CA}. Z definicji dwusiecznych $d_{AB} = d_{BC}, d_{BC} = d_{CA}$, więc $d_{AB} = d_{CA}$ i punkt X jest szukanym punktem.



☐

Zadanie 28. Uzasadnij, że dla danych prostych k, l przecinających się w punkcie P zbiór punktów równoodległych od k i l jest dwoma prostymi przechodzącymi przez P i zawierającymi dwusieczne odpowiednich kątów pomiędzy k i l.

Zadanie 29. Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta BAC z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Dowiedź, że D jest równoodległy od B, C, I gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

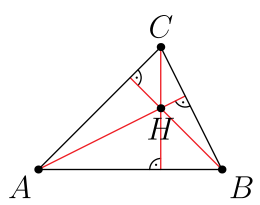
Wskazówka: pokaż najpierw, że D leży na symetralnej BC, potem policz kąty w $\triangle DIB$.

Zadanie 30. Pokaż, że dwusieczna kąta zewnętrznego BAC, dwusieczna kąta zewnętrznego BCA i dwusieczna kąta wewnętrznego ABC przecinają się w jednym punkcie, równoodległym od prostych AB, BC, CA. Punkt taki nazywamy *środkiem okręgu dopisanego do boku AC trójkąta ABC.*

3.6 Ortocentrum

Twierdzenie 3.9 (Ortocentrum). *Trzy proste zawierające wysokości trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie. Oznaczamy go zwykle H i nazywamy* punktem przecięcia wysokości *(zaskakujące, co?) albo* ortocentrum.

Prościej jest udowodnić, że ortocentrum istnieje wprost, niż zastanawiając się, jaka jest dokładnie szczególna własność wysokości (tak, jak robiliśmy z okręgami wpisanym i opisanym). Notabene taka szczególna własność istnieje, jest nieco trudniejsza (i ukryta w dowodzie).



Szkic dowodu. Przez punkt A poprowadźmy prostą równoległą do boku BC, przez B prostą równoległą do boku AC, a przez punkt C prostą równoległą do boku AB. Proste te tworzą nowy trójkąt $A'B'C'$. Udowodnij, że proste zawierające wysokości w $\triangle ABC$ pokrywają się z symetralnymi $\triangle A'B'C'$, więc szukany punkt przecięcia to środek okręgu opisanego na $\triangle A'B'C'$. $\square$

Zadanie 31. W trójkącie ABC niech H_A, H_B, H_C będą rzutami A, B, C na boki BC, CA, AB odpowiednio. Uzasadnij, że wysokości $\triangle ABC$ są zawarte w dwusiecznych trójkąta $\triangle H_A H_B H_C$ i wywnioskuj, że ortocentrum H trójkąta ABC jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle H_A H_B H_C$.

Wskazówka: wykaż, że na AH_BHH_C da się opisać okrąg i zastosuj równość kątów wpisanych.

3.7 Środek ciężkości

Definicja 3.10 (Środkowa)**.** *Środkową poprowadzoną z punktu A trójkąta $\triangle ABC$ nazywamy odcinek łączący A ze środkiem boku BC.*

Twierdzenie 3.11 (Środek ciężkości)**.** *Niech ABC będzie trójkątem. Trzy środkowe wypuszczone z wierzchołków $\triangle ABC$ przecinają się w jednym punkcie, który oznaczamy M i nazywamy środkiem ciężkości trójkąta ABC. Jeżeli A', B', C' są środkami boków BC, CA, AB to zachodzi*

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{MB}{MB'} = \frac{MC}{MC'} = 2.$$

Szkic dowodu. Niestety każdy znany mi dowód w mniej lub bardziej ukryty sposób polega na układzie współrzędnych. Ustalmy na płaszczyźnie układ współrzędnych. Zdefiniujmy, dla czytelności,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ oraz } k \cdot (x_1, y_1) := (kx_1, ky_1).$$

Wtedy $A' = \frac{1}{2}(B + C), B' = \frac{1}{2}(C + A), C' = \frac{1}{2}(A + B)$. Połóżmy $M := \frac{1}{3}(A + B + C)$, wtedy $M = \frac{1}{3}(2 \cdot A' + A)$, więc M leży na odcinku AA' i $MA/MA' = 2$ (dlaczego?). Identyczny jest dowód dla pozostałych środkowych. $\square$

Zadanie 32. Dany jest trójkąt ABC ze środkową AA' oraz punkt P leżący na AA'. Przez P prowadzimy prostą równoległą do BC, przecinającą boki trójkąta w B', C'. Udowodnij, że P jest środkiem $B'C'$.

Zadanie 33. Uzasadnij, że sześć trójkątów, na które trzy środkowe dzielą trójkąt ABC, ma równe pola.

3.8 Cztery punkty na okręgu.

Lemat 3.12. *Dany jest trójkąt ABC i środek O okręgu opisanego na nim.*

1. *Jeżeli $\sphericalangle ABC < 90°$ to punkty B i O leżą po tej samej stronie prostej AC.*
2. *Jeżeli $\sphericalangle ABC = 90°$ to punkt O leży na AC.*
3. *Jeżeli $\sphericalangle ABC > 90°$ to punkty B i O leżą po różnych stronach prostej AC.*

Szkic dowodu. Rozważmy okrąg o opisany na $\triangle ABC$. Miara kąta $\sphericalangle ABC$, położenie punktu O i zależności z tezy nie zmienią się, jeżeli zastąpimy punkt B punktem leżącym na środku łuku AC zawierającego B. Wobec tego możemy założyć, że $AB = BC$. W tym momencie dowód pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

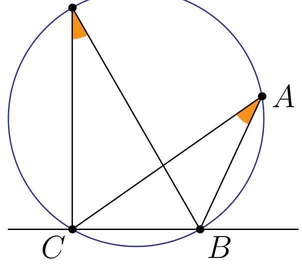
Twierdzenie 3.13. *Jeżeli punkty A, D leżą po tej samej stronie prostej BC to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$.*

Dowód.

Jeżeli na $ABCD$ da się opisać okrąg to równość wynika z twierdzenia o kątach wpisanych.

Załóżmy zatem, że równość zachodzi i rozważmy środki O, O' okręgów opisanych na $\triangle ABC, \triangle BCD$. Z lematu 3.12 leżą one po tej samej stronie BC. Ponadto kąt BOC jest mniejszy od 180° więc równy $\min(2\sphericalangle BAC, 360° - 2\sphericalangle BAC)$ i takąż miarę ma kąt $BO'C$.

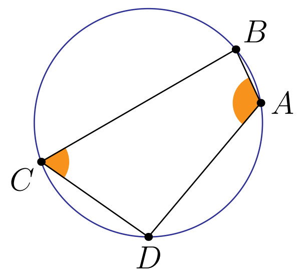
Skoro $BO = CO$ i $BO' = CO'$ to równość $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BO'C$ dowodzi przystawania $\triangle BOC \equiv \triangle BO'C$. Oba punkty O, O' leżą po tej samej stronie BC, więc z przystawiania wynika równość $O = O'$. $\square$



Twierdzenie 3.14. *Jeżeli punkty A, C leżą po przeciwnych stronach prostej BD to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180°$.*

Dowód.

Jeżeli na $ABCD$ da się opisać okrąg to równość wynika z zadania 24 z podrozdziału o kątach wpisanych i środkowych.
Załóżmy zatem, że równość zachodzi i rozważmy środki O, O' okręgów opisanych na $\triangle DAB, \triangle BCD$. Przypadek $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90°$ pozostawiam czytelnikowi, dalej zakładam, że kąty nie są równe $90°$.
Dokładnie jeden z kątów $\sphericalangle BAD, \sphericalangle BCD$ jest rozwarty, wiec z lematu 3.12 punkty O, O' leżą po tej samej stronie BD.



Kąt BOD jest mniejszy od $180°$ więc równy $\min(2\sphericalangle BAD, 360° - 2\sphericalangle BAD)$ i takąż miarę ma kąt $BO'D$. Skoro $BO = DO$ i $BO' = DO'$ to równość $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BO'D$ dowodzi przystawania $\triangle BOD \equiv \triangle BO'D$. Oba punkty O, O' leżą po tej samej stronie BD, więc z przystawiania wynika równość $O = O'$. □

Zadanie 34. Pokaż, że jeżeli $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$, to istnieje okrąg przechodzący przez punkty A, B, C, D.

Wskazówka: gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym?

Zadanie 35. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC w którym $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że $\triangle DEM$ jest równoboczny.

Wskazówka: Punkt M jest środkiem pewnego okręgu przechodzącego przez cztery punkty z treści.

Zadanie 36. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Uzasadnij, że punkty symetryczne do H względem boków trójkąta ABC leżą na okręgu opisanym na $\triangle ABC$.

Wskazówka: Niech H' będzie punktem symetrycznym, pokaż, że $ABCH'$ jest czworokątem wpisanym w okrąg.

3.9 Styczne do okręgu.

Stwierdzenie 3.15. *Styczne do okręgu wypuszczone z punktu P mają równe długości. Prosta łącząca P ze środkiem okręgu jest dwusieczną kąta o ramionach będących stycznymi.*

Dowód. Niech O oznacza środek okręgu, zaś A, B oznaczają punkty styczności. Styczne są prostopadłe do promienia w punkcie styczności, więc $\triangle PAO, \triangle PBO$ są prostokątne i z twierdzenia Pitagorasa

$$PA = \sqrt{PO^2 - AO^2} = \sqrt{PO^2 - BO^2} = PB.$$

Dowodzi to, że trójkąty PAO, PBO są przystające, więc zachodzi $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$, czyli PO jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$. □

Zadanie 37. Niech ABC będzie trójkątem o bokach długości $a := |BC|, b := |AC|, c := |AB|$. Niech okrąg wpisany w $\triangle ABC$ będzie styczny do boku AB w C_1. Udowodnij, że

$$|AC_1| = \frac{b + c - a}{2}.$$

Wskazówka: rozbij boki trójkąta na styczne wychodzące z A, B, C.

4 Kombinatoryka

4.1 Zliczanie

Silnię liczby całkowitej $n \geqslant 0$ definiujemy przez $0! := 1$ oraz $n! = n \cdot (n-1)!$ dla $n > 0$. Bardzo przydatne okazuje się pojęcie $0!$ jako "pustego" iloczynu.

W zliczaniu często pojawia się motyw wyboru ciągu lub podzbioru ze zbioru. Mówimy, że *wybieramy ze zwracaniem* jeżeli możemy kilkukrotnie wybrać ten sam element natomiast *wybieramy bez zwracania*, gdy nie jest to dozwolone. Zwykle ta pierwsza metoda daje się policzyć prościej.

Stwierdzenie 4.1. *Elementy zbioru n-elementowego możemy ustawić w ciąg na dokładnie $n!$ sposobów.*

Szkic dowodu. Dla $n = 0$ jest to prawda. Dla $n > 0$ liczbę stojącą na pierwszej pozycji ciągu możemy wybrać na n sposobów i pozostaje nam ustawić $n - 1$ liczb w ciąg. ☐

Definicja 4.2 (Współczynniki dwumianowe)**.** *Dla dowolnych n, k całkowitych nieujemnych definiujemy*

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Zachodzi

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k > n \\ \frac{n!}{(n-k)!k!} & \text{dla } k \leqslant n. \end{cases}$$

Stwierdzenie 4.3. *Ustalmy liczby całkowite nieujemne $n \geqslant k$. Ze zbioru n-elementowego $\mathcal{A}$ możemy wybrać (bez zwracania)*

1. *ciąg k-elementowy na $n!/(n-k)!$ sposobów,*
2. $$\text{zbiór } k \text{ elementowy na } \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ sposobów.}$$

Dowód. Rozważmy wszystkie ustawienia zbioru $\mathcal{A}$ w ciąg. Z każdego takiego ciągu możemy wybrać pierwszych k elementów, uzyskując ciąg k elementowy. Uzyskamy w ten sposób każdy z k-elementowych ciągów i każdy z nich $(n-k)!$ razy — tyle, na ile sposobów da się ustawić "ogon" czyli $n - k$ elementów z ciągu. Ciągów jest zatem $n!/(n-k)!$.

Aby dowieść równości dla zbiorów zauważmy, że z każdego zbioru da się otrzymać $k!$ różnych ciągów, a z każdego ciągu da się (przez zapomnienie o kolejności) otrzymać dokładnie jeden zbiór. Wobec tego zbiorów jest $k!$ razy mniej niż ciągów, czyli $\binom{n}{k}$. ☐

Wniosek 4.4. *Liczba $\binom{n}{k}$ jest, dla dowolnych k, n całkowitych nieujemnych, liczbą k-elementowych podzbiorów zbioru n.*

Dowód. Wynika to wprost z 4.3 o ile $k \leqslant n$. Dla $k > n$ jest oczywiste — obie wartości to 0. ☐

Zadanie 38. Pokaż, że ciąg k-elementowy ze zbioru n-elementowego ze zwracaniem można wybrać na n^k sposobów.

Zadanie 39. Pokaż, że o ile $k \leqslant n$ są całkowite nieujemne to

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Najlepiej zrobić to zadanie na dwa sposoby: korzystając bezpośrednio z definicji, czyli przeliczając, i korzystając z wniosku 4.4 i interpretacji kombinatorycznej. Przykładowo w drugiej równości rozważamy podzbiory k-elementowe zawierające dany element i pozostałe.

4.2 Indukcja

Załóżmy, że chcemy udowodnić, że $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ dla każdego n całkowitego dodatniego.

Powiedzmy, że udowodniliśmy, że

1. powyższa równość jest prawdziwa dla $n = 1$,
2. dla każdego $K \geqslant 1$ jeśli powyższa równość jest prawdziwa dla $n = K$ to również dla $n = K + 1$.

Wtedy równość jest prawdziwa dla dowolnego $n \geqslant 1$. Zaiste jest ona prawdziwa dla $n = 1$ a więc i dla $n = 2$, stąd dla $n = 3$, czyli i dla $n = 4$ itd.

Zadanie 40. Udowodnij stwierdzenia z podpunktów 1,2.

Zadanie 41. Pokaż, że dla dowolnego rzeczywistego $a > -1$ i każdego całkowitego nieujemnego n zachodzi nierówność

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

Wskazówka: $(1 + a)^n = (1 + a) \cdot (1 + a)^{n-1}$.

Zadanie 42. Niech (F_n) będzie *ciągiem Fibonacciego* zdefiniowanym przez następujące warunki:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

1. Udowodnij, że $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.
2. Dowiedź, że F_n jest, dla $n \geqslant 1$ liczbą ustawień n prostokątów 1×2 w pudełku o wymiarach $2 \times n$. *Wskazówka: czworokąt ustawiony w lewym dolnym rogu może stać pionowo lub poziomo, policz te przypadki osobno.*

4.3 Zasada szufladkowa Dirichleta

Stwierdzenie 4.5 (Zasada szufladkowa Dirichleta)**.** *Jeżeli n przedmiotów leży w k szufladkach oraz $n > C \cdot k$ dla pewnego C całkowitego dodatniego, to w pewnej szufladce jest co najmniej $C+1$ przedmiotów.*

W szczególności: Jeżeli n przedmiotów leży w k szufladkach oraz $n > k$ to w pewnej szufladce są co najmniej dwa przedmioty.

Szkic dowodu. Przez zaprzeczenie; jeżeli w każdej szufladce $\leqslant C$ to łącznie $\leqslant C \cdot K$. □

Zadanie 43. Udowodnić, że wśród 50 osób pewne osiem urodziło się w tym samym dniu tygodnia.

Zadanie 44. 200 różnych punktów zostało wybranych na okręgu tak, że kąt środkowy oparty na dowolnych dwóch z nich ma całkowitą ilość stopni. Dowiedź, że wśród nich istnieją punkty antypodyczne (tzn. symetrycznie względem środka okręgu).

Zadanie 45. Na kartce w kratkę na przecięciach linii narysowano pięć punktów. Uzasadnij, że środek pewnego odcinka łączącego dwa z nich wypada na przecięciu linii. Czy dla czterech punktów także da się znaleźć taki odcinek?

Wskazówka: wprowadź układ współrzędnych; patrz na parzystości współrzędnych.

Zadanie 46.

1. Uczestnicy obozu Nowogród 2012 poznają się na facebooku lub "w realu". Uzasadnić, że wśród każdych sześciu z nich istnieje trójka, w której każde dwie osoby poznały się tak samo.
2. Pomiędzy każdymi z dwoma z 17 planet istnieje połączenie hiperprzestrzenne. Połączenia są obsługiwane przez firmy: "Shuttle ltd.", "Warp prism" oraz "Overlord transport & co". Uzasadnić, że pomiędzy pewnymi trzema planetami wszystkie połączeniami są obsługiwane przez tę samą firmę.

Wskazówka: w punkcie pierwszym zauważ, że dowolna wybrana osoba ma co najmniej trzech znajomych, z którymi zna się w ten sam sposób; pomyśl, jak mogą znać się Ci znajomi.

Zadanie 47. W kwadratowej sali o boku długości dwóch kilometrów znajduje się pięć ławek, w których siedzi Magda, Marysia, Karolina, Ania i Dominika. Uzasadnij, że przynajmniej dwie z nich siedzą w odległości mniejszej niż półtora kilometra (więc potencjalnie mogą ściągać!).

Wskazówka: podziel salę na pięć obszarów takich, że dwa punkty leżące w każdym z nich są w odległości mniejszej niż półtora kilometra.

Zadanie 48. Przy okrągłym stole ma usiąść 2012^{2012} ambasadorów. Na stole poustawiano proporczyki z nazwiskami, a następnie posadzono przy stole ambasadorów, ale tak, że żaden nie siedział na swoim miejscu. Udowodnić, że można tak obrócić stół, żeby przynajmniej 2 ambasadorów siedziało na swoich miejscach.

Wskazówka: Różnych obrotów jest tyle, ilu jest ambasadorów. Przyporządkuj obrotowi ambasadorów siedzących przy swoich proporczykach.

4.4 Kolorowe szachownice

Ten podrozdział dotyczy bardzo specyficznego, ale często spotykanego problemu: czy da się zbudować figurę z danych klocków. Co więcej, w większości zadań tak figura jak i klocki są prostokątami.

Rozwiązaniem jest pomalowanie niektórych pól kolorami, patrz poniżej.

Zadanie 49. Uzasadnij, że kwadratu 10×10 nie da się pokryć klockami zbudowanymi z czterech kwadratów 1×1, zlepionych w literę T.

Rozwiązanie.
Załóżmy, że kolorowanie istnieje; wtedy pokrywać kwadrat musi 25 klocków. Pokolorujmy kwadrat w szachownicę. Każdy z klocków pokrywa 3 lub 1 pole czarne. Oznaczmy przez B i C liczbę klocków obu rodzajów. Z jednej strony $B + C = 25$ a z drugiej $B + 3C = 50$. Wobec tego $2C = 25$ i otrzymujemy sprzeczność.

Zadanie 50. Czy szachownicę 2012×2012, z której usunięto przeciwległe narożne pola, można pokryć kostkami domina 2×1 (kostki można obracać)?

Zadanie 51. Na każdym polu szachownicy 2011×2011 stoi ławka, a przy każdej ławce siedzi uczestnik kółka matematycznego. Na koniec kółka każdy uczestnik przechodzi do ławki na polu sąsiadującym bokiem. Udowodnij, że pewnych dwóch uczestników znajdzie się na tym samym polu.

Zadanie 52. Wykaż, że szachownicy 10×10 nie da się pokryć klockami 1×4.
Wskazówka: przykładowo można pokolorować tak, by każdy czworokąt zawierał dokładnie jedno czarne pole i łącznie była inna liczba czarnych pól niż 25. *Spróbuj pokolorować "przekątnymi".*

4.5 Niezmienniki

Ukochaną treścią kombinatoryk OMowych jest "mamy sytuację A, wykonujemy jakieś ruchy zmieniające ją, czy możemy dojść do sytuacji B?". Zwykle nie da się sprawdzić (mniej lub bardziej inteligentnie) wszystkich możliwości, trzeba więc wybrać *niezmiennik* lub *półniezmiennik* — cechę sytuacji, która nie zmienia się lub zmienia się w dobry dla nas sposób.

Zadanie 53. Mamy daną liczbę 2009!. Obliczamy sumę jej cyfr, sumę cyfr liczby tak otrzymanej itd. Po pewnej liczbie ruchów otrzymaliśmy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba?

Rozwiązanie.
Reszta z dzielenia liczby przez 9 nie zmienia się (to cecha podzielności przez 9) a 2009! jest podzielna, więc otrzymamy 9.

Zadanie 54. Dana jest tablicy 2011×2011 wypełniona na początku liczbami -1. W każdym ruchu wybieramy i mnożymy 2012 liczb przez -1. Uzasadnij, że nie możemy otrzymać planszy wypełnionej jedynkami.
Wskazówka: popatrz na iloczyn.

Zadanie 55. Na tarczy zegara w miejsce liczb wkręcono żarówki. Żarówka na godzinie 12 jest zapalona, pozostałe są zgaszone. Możemy wybrać dowolne sześć kolejnych żarówek i jednocześnie zmieniać stan wszystkich tych żarówek. Czy możemy w ten sposób doprowadzić do tego, by świeciła tylko jedna żarówka, ta na godzinie 11?
Wskazówka: popatrz, jak zmienia się liczba zapalonych żarówek, jeżeli patrzymy tylko na godziny $3, 6, 9, 12$, *pamiętaj, że wybieramy kolejnych sześć.*

Zadanie 56. *LVII OM, etap 2, mniej więcej* Trójkąt równoboczny o boku długości 2012 jest złożony z płytek w kształcie trójkącików równobocznych o boku długości jeden, mających jedną stronę pokolorowaną na karolinowo a drugą na szymonowo. Płytkę można odwrócić niewidoczną stroną do góry, jeżeli sąsiaduje z co najmniej dwoma płytkami mającymi widoczną stronę w innym kolorze. Uzasadnij, że nie istnieje ustawienie startując od którego możemy odwracać płytki bez końca.
Wskazówka: pokaż, że zmniejsza się liczba krawędzi pomiędzy płytką pokolorowaną na karolinowo a płytką pokolorowaną na szymonowo.

5 Nierówności

5.1 Podstawy

Nierównością, z której wszystko wywodzi się, jest $x^2 \geqslant 0$ dla dowolnego x rzeczywistego. Wynika z niej $(a-b)^2 \geqslant 0$, czyli
$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab. \tag{1}$$

Zadanie 57. Uzasadnij, że jeśli $a, b > 0$ to

1. $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$,
2. $a + 1 \geqslant 2\sqrt{a}$,
3. $a + \frac{1}{4} \geqslant \sqrt{a}$,
4. $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Wszystkie te nierówności są szczególnymi przypadkami 1.

Zadanie 58. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Zadanie 59. Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb a, b, c zachodzi nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Zadanie 60. Pokaż, że jeżeli a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 6.$$

Wskazówka: rozbij na trzy wyrażenia postaci $x + x^{-1}$; są one $\geqslant 2$.

5.2 Nierówności między średnimi

Definicja 5.1 (Średnie)**.** *Niech liczby $a_1, \ldots, a_n$ będą dodatnie.*

Definiujemy średnie

1. *Harmoniczną*
$$H_n(a_1, \ldots, a_n) := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$
np. $H_3(a, b, c) = 3 \cdot (1/a + 1/b + 1/c)^{-1}$.
2. *Geometryczną*
$$G_n(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$
np. $G_6(q, w, e, r, t, y) = \sqrt[6]{qwerty}$.
3. *Arytmetyczną*
$$A_n(a_1, \ldots, a_n) := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
np. $A_2(x, y) = \frac{x+y}{2}$.
4. *Kwadratową*
$$K_n(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$
np. $K_4(1, 2, 3, 4) = \sqrt{\frac{1+4+9+16}{4}}$.

Twierdzenie 5.2 (Nierówność pomiędzy średnimi)**.** *Jeżeli liczby $a_1, \ldots, a_n$ są dodatnie, to*

$$H_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant G_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant A_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant K_n(a_1, \ldots, a_n).$$

Szkic dowodu. Uwaga: ten dowód jest bardzo długi, dość trudny i techniczny, niekoniecznie trzeba go znać.

Dla skrótu, czasami pomijamy nawias np. piszemy A_n zamiast $A_n(a_1, \ldots, a_n)$.

Najpierw udowodnimy, że $G_n \leqslant A_n$. Dla $n = 1$ są one równe, dla $n = 2$ dowiedliśmy tego w zad. 57.

Zauważmy, że $G_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n}) = G_2\left(G_n(a_1, \ldots, a_n), G_n(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})\right)$ i podobnie dla A_{2n}. Załóżmy, że wiemy, że $G_n \leqslant A_n$ dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$. Wtedy

$$G_{2n} = G_2(G_n, G_n) \leqslant A_2(G_n, G_n) \leqslant A_2(A_n, A_n) = A_{2n}$$

dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$.

Załóżmy, że chcemy dowieść, że $G_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant A_n(a_1, \ldots, a_n)$, wiedząc, że $G_{n+1} \leqslant A_{n+1}$ dla dowolnych liczb dodatnich. Zauważmy, że

$$A_n = A_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, A_n) \geqslant G_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, A_n) = G_n^{n/(n+1)} \cdot A_n^{1/(n+1)}, \text{ stąd } G_n \leqslant A_n.$$

Pokazaliśmy, że jeżeli nierówność $G_n \leqslant A_n$ jest prawdziwa dla n to i dla $2n$ oraz jeżeli jest prawdziwa dla $n+1$ to i dla n. Czytelnikowi pozostawiamy dowód przez indukcję, że jest ona prawdziwa dla dowolnego n.

Zauważmy, że $H_n(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) = A_n(a_1, \ldots, a_n)^{-1}$ oraz $G_n(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) = G_n(a_1, \ldots, a_n)^{-1}$. Wynika z tego, że nierówność

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) \geqslant H_n(a_1, \ldots, a_n)$$

jest równoważna $G_n(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) \leqslant A_n(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$, co jest prawdą.

Pozostało dowieść $A_n \leqslant K_n$. To jest pałowanie. Podnosząc do kwadratu i mnożąc przez n^2 stronami otrzymujemy

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Ta nierówność jest równoważna, po pomnożeniu przez 2 stronami, nierówności

$$0 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i - a_j)^2.$$

Przy okazji widać stąd, że nierówność $A_n \leqslant K_n$ jest "najsłabsza" – ma najprostszy dowód.

Uwaga: z dowodu wynika, że nierówności $G_n \leqslant A_n \leqslant K_n$ są prawdziwe również dla liczb nieujemnych.

□

ZADANIE 61.

Liczby a, b, c są rzeczywiste dodatnie.

We wszystkich poniższych nierównościach zastąp ⩾☠⩽ jednym ze znaków: $\geqslant, \leqslant$ po czym udowodnij otrzymaną nierówność.

1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ⩾☠⩽ $\frac{9}{a+b+c}$,
2. $(a+b+c)^2$ ⩾☠⩽ $3(a^2+b^2+c^2)$,
3. $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ ⩾☠⩽ $6abc$,
4. $(a+b+c)^2$ ⩾☠⩽ $3(ab+bc+ca)$,
5. $a^2+b^2+c^2+3$ ⩾☠⩽ $2(a+b+c)$,
6. $\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$ ⩾☠⩽ $a+b+c$.

5.3 Warunki

Czasami nierówność przychodzi z pewnym warunkiem. Wtedy warto pozbyć się warunku podstawiając odpowiednio do równania. Dwie najczęstsze sytuacje ukazane są poniżej.

ZADANIE 62. Kwadraty liczb dodatnich a, b, c sumują się do 1. Uzasadnij, że $-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1$.

Wskazówka: pomnóż 1 i $-1/2$ przez taką potęgę $a^2+b^2+c^2$, żeby zmiana zmiennych $a \to Na, b \to Nb, c \to Nc$ nie zmieniała nierówności.

ZADANIE 63. Iloczyn liczb dodatnich a, b, c jest równy 1. Udowodnij, że $a+b+c \geqslant 3$. Wykaż też, że $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3$.

Wskazówka: ustal x, y, z tak, że $a = x/y, b = y/z, c = z/x$.

[spisał Joachim Jelisiejew, dziękuję Marii Banel za poprawki]