



[Zadania PDF.](#)



[Rozwiązania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
%      File: zad.tex %      Created: Mon Sep 10 01:00 PM 2012 C % Last Change: Mon Sep
10 01:00 PM 2012 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin
0cm topmargin 1in headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel}
usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import}
%usepackage{MnSymbol} % ----- vfuzz4pt %
Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if
over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ vskip 3mm
noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{
stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}} } {hfillpar} defabs
#1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant}
renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty}
```

```
%\include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{11 września 2012} begin{document} section{Niewymierne?} begin{problem} Czy liczba  $\sqrt{2}$  jest wymierna? end{problem} begin{problem} Czy liczba  $\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)$  jest wymierna? end{problem} begin{problem} Czy liczba  $(1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2$  jest wymierna?  $\star$ . Czy liczba  $(1 - \sqrt{2})^{2012} + (1 + \sqrt{2})^{2012}$  jest wymierna? end{problem} begin{problem} Udowodnij, że liczba  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  nie jest wymierna.  $\star$ . Czy liczba  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$  jest wymierna? {Wskazówka:  $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ , pozbadź się  $\sqrt{3}$ .}  $\star$ . Czy liczba  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  jest wymierna? end{problem} begin{lem} Liczba wymierna  $p/q$  ( $p, q$  są całkowite) jest pierwiastkiem wielomianu  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  o współczynnikach całkowitych. Uzasadnij, że  $p/q$  jest całkowite. end{lem} begin{problem} Udowodnij, że jeśli  $x$  jest całkowity, to liczba  $\sqrt{x}$  jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowita. Udowodnij ponownie, że liczba  $\sqrt{3}$  nie jest wymierna. end{problem} end{document}
```

Źródło rozwiązań w texu.

```
% File: zad.tex % Created: Mon Sep 10 01:00 PM 2012 C % Last Change: Mon Sep 10 01:00 PM 2012 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm texheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0in headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % ----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{\vskip 3mm noindentemph{#1}}{\hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{\stepcounter{problem} \vskip 3mm noindent{\textsc{bfseries #1 theproblem}}}{\hfillpar} defabs #1{\leftvert #1\rightvert} renewcommand{angle}{\sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{\overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{\leqslant} renewcommand{geq}{\geqslant} renewcommand{dots}{\ldots} subimport{../}{style.sty} %\include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{11 września 2012} begin{document} section{Niewymierne?} {Całkiem możliwe, że coś poniżej jest nie tak. Jeśli zauważycie coś piszcie! I~nie myślcie, że się wygłupicie.} begin{problem} Czy liczba  $\sqrt{2}$  jest wymierna? end{problem} begin{sol}[Szkic rozwiązania] Jeżeli  $\sqrt{2} = p/q$ , gdzie  $p, q$  całkowite, to  $2q^2 = p^2$ . Najwyższa potęga  $2$  dzieląca liczbę po lewej stronie jest parzysta, a~po prawej~--- nieparzysta. Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej innej liczby  $\sqrt{n}$ , o~ile  $n$  nie jest kwadratem liczby całkowitej. Zamiast  $2$  analizuje się wtedy potęgi liczb pierwszych dzielących  $n$ . {Dobrym wnioskiem z~tego zadania jest ogólna i~banalna, lecz
```

użyteczna prawda: } jeżeli liczba A jest niewymierna, a b wymierna, to wyrażenie $b \cdot A$ jest wymierne tylko jeśli $b = 0$. $\end{sol}$ $\begin{problem}$ Czy liczba $\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}$ jest wymierna? $\end{problem}$ $\begin{sol}$ Nie. Potęgi liczby wymiernej są wymierne, więc gdyby liczba z zadania była wymierna, wymierna byłaby także $\sqrt{2} + 1$, a więc $i\sqrt{2}$, co nie jest prawdą. $\end{sol}$ $\begin{problem}$ Czy liczba $(1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2$ jest wymierna? $\star$ Czy liczba $(1 - \sqrt{2})^{2012} + (1 + \sqrt{2})^{2012}$ jest wymierna? $\end{problem}$ $\begin{sol}$ $\begin{enumerate}$ item Liczba ta jest równa 6 , a więc jest wymierna. item Sytuacja jest identyczna jak w poprzednim podpunkcie. Tutaj, zamiast obliczać wynik bezpośrednio korzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona. Głosi on, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$] gdzie $\binom{n}{k}$ są liczbami całkowitymi niezależnymi od a, b (wzór podaje również, że $\binom{n}{k} = n! / (k!(n-k)!)$, ale nie będzie nam to potrzebne. Wobec tego, ze wzoru $\begin{align*} (1 + \sqrt{2})^{2012} &= \binom{2012}{0} + \binom{2012}{1} \sqrt{2} + \binom{2012}{2} \cdot 2 + \dots \\ (1 - \sqrt{2})^{2012} &= (1 + (-\sqrt{2}))^{2012} = \binom{2012}{0} - \binom{2012}{1} \sqrt{2} + \binom{2012}{2} \cdot 2 - \dots \end{align*}$ z tych wzorów wynika, że liczba niewymierna $\binom{n}{k} \cdot \sqrt{2}^k$ skróci się (bo k jest nieparzyste!) z $\binom{n}{k} \cdot (-\sqrt{2})^k$ i otrzymana liczba będzie wymierna, a więc całkowita. $\end{enumerate}$ $\end{sol}$ $\begin{problem}$ Udowodnij, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nie jest wymierna. $\star$ Czy liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ jest wymierna? $\emph{Wskazówka: \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$, pozbadź się $\sqrt{3}$. $\star$ Czy liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ jest wymierna? $\end{problem}$ $\begin{sol}$ [Szkic rozwiązania] $\begin{enumerate}$ item Gdyby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ była wymierna, po podniesieniu jej do kwadratu stwierdzilibyśmy, że $5 + 2\sqrt{6}$ jest wymierne, co nie jest prawdą (patrz zadanie 1). item $\emph{Przykładowe rozwiązanie.}$ Niech $w := \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ będzie wymierna, wtedy $[w^2 - 2w\sqrt{6} + 6 = (w - \sqrt{6})^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}]$ Skoro $\sqrt{6}$ jest niewymierne, to jego wystąpienia z obu stron skracają się, więc $w = -1$. Co jest nonsensem, bo $w > 0$ z definicji. $\emph{Inne rozwiązanie}$ Tak jak poprzednio oznaczamy w , ale tym razem przekształcamy równanie do postaci $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + 1) = w$, stąd $[\sqrt{3} = \frac{w - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = (w - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1) = (w+1) \cdot \sqrt{2} + (-2-w)]$ po podniesieniu do kwadratu stwierdzamy, że $\sqrt{2} \cdot (w+1) \cdot (-w-2)$ jest wymierne, stąd $w+1=0$ lub $-w-2=0$, oba przypadki wykluczone przez proste szacowanie $w > 3$. item Znowu: niech $w := \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, wtedy $w - \sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ i (używamy q na oznaczenie liczby wymiernej, która nas nie obchodzi) $[(w - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 0 \text{ czyli } -2w\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + q = 0, q \in \mathbb{Q}]$ Przerzucając q na drugą stronę i znowu podnosząc do kwadratu stwierdzamy, że $8 \cdot w^2 \cdot \sqrt{30}$ jest wymierne, więc $w = 0$. Co jest bez sensu, skoro $w > 0$. $\end{enumerate}$ $\end{sol}$ $\begin{lem}$ Liczba wymierna p/q (p, q są całkowite) jest pierwiastkiem wielomianu $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ o współczynnikach całkowitych. Uzasadnij, że p/q jest całkowite. $\end{lem}$ $\begin{proof}$ Skracając ułamek możemy założyć, że p i q nie mają wspólnych dzielników pierwszych. Podstawmy p/q pod x otrzymując $[\left(\frac{p}{q} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} + \dots + a_0 = 0]$ i pomnożmy przez q^n otrzymując $[\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_0 q = 0]$ Wszystkie wyrazy sumy poza p^n/q^n są całkowite, więc p^n/q^n jest całkowite. A stąd wynika, że p/q jest całkowite (patrz na rozkład na czynniki pierwsze). $\end{proof}$ $\begin{problem}$ Udowodnij, że jeśli x jest

Kółko o niewymierności

Wpisany przez Joachim Jelisiejew

piątek, 14 września 2012 21:30 - Poprawiony piątek, 14 września 2012 21:35

całkowity, to liczba $\sqrt{x}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy x jest całkowita.

Udowodnij ponownie, że liczba $\sqrt{3}$ nie jest wymierna. `end{problem} begin{sol}` Liczba $\sqrt{x}$ jest pierwiastkiem wielomianu $P(X) = X^2 - x$. Skoro x jest całkowity, to wielomian ten spełnia warunki lematu, więc wprost z lematu wynika, że jeśli $\sqrt{x}$ jest wymierny, to jest całkowity. Skoro $1 < \sqrt{3} < 2$, to liczba ta nie jest całkowita a więc i (wobec powyższego!) nie jest wymierna. `end{sol} end{document}`