



[](#)
[Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
%      File: zad.tex %      Created: Thu Oct 21 11:00 AM 2010 C % Last Change: Thu Oct 21
11:00 AM 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath}
textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep
0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc}
usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} %
----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small %
THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]
newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{}
newenvironment{proof}[1][Dowód. ]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$\blacksquare$\par}
newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar}
newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}} {hfillpar} defdeg{^{\circ}}
defsource#1{\Źródło: #1} subimport{../}{style} %include{style} begin{document}
section{Fermat, Euler i inne chłopaki} subsection{Teoria} begin{enumerate} item
begin{thm}[Małe twierdzenie Fermata] Jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą, zaś  $a$  jest
liczbą całkowitą niepodzielną przez  $p$ , to  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ .
end{thm} item begin{thm}[Małe twierdzenie Fermata, równoważnie] Jeżeli  $p$  jest
liczbą pierwszą, zaś  $a$  jest liczbą całkowitą, to  $a^p \equiv a \pmod p$ .
end{thm} emph{Wypadł tutaj warunek  $p \nmid a$ .} item begin{defn} Liczbę
takich  $a$  w  $\{1, 2, \dots, n\}$ , że  $a$  jest względnie pierwsze z  $n$ , oznaczam jako
 $\phi(n)$ . end{defn} % emph{Uwaga:} Załóżmy, że  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots$ 
%  $p_k^{a_k}$  jest rozkładem liczby  $n$  na czynniki pierwsze. Wtedy %  $\phi(n) =$ 
 $(p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1}) \dots (p_n^{a_n} - p_n^{a_n - 1})$ .
% Np.  $\phi(12) = \phi(2^2 \cdot 3) = (2^2 - 2)(3 - 1) = 4$ . % Faktycznie liczby
```

względnie pierwsze z 12 i nie większe od 12 to % liczby $1, 5, 7, 11$. item
begin{thm}[Eulera] Niech n będzie liczbą naturalną, zaś a liczbą całkowitą
względnie pierwszą z n tj. $\text{NWD}(a, n) = 1$. Wtedy $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$,
gdzie $\phi(n)$ jest zdefiniowane jak wyżej. end{thm} end{enumerate}
subsection{Zadania} begin{enumerate} item begin{problem} Uzasadnij
(najlepiej bez obliczeń), że $21 \nmid 1^7 + 2^7 + \dots + 6^7$,
 $21 \nmid 1^{600001} + 2^{600001} + \dots + 6^{600001}$. end{enumerate}
emph{Wskazówka: $21 = 1+2+3+4+5+6$. Hm, czyżby zachodziło jakieś
przystawianie $\pmod{21}$;).} end{problem} item begin{problem}
Udowodnij (w skończonym czasie; da się bez obliczeń), że dla dowolnej liczby
całkowitej a , liczba a^{1005} daje z dzielenia przez 2011 resztę ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$.
end{problem} item begin{problem} Udowodnij, że:
begin{enumerate} item $7^6 \equiv 6^6 \equiv 1 \pmod{43}$, item jeżeli $n = 6k-1$ ($k \in \mathbb{Z}$), to $43 \nmid 7^n - 6^n - 1$, item jeżeli $n = 6k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$), to $43 \nmid 7^n - 6^n - 1$, item jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3 , to $43 \nmid 7^p - 6^p - 1$. end{enumerate} end{problem} item
begin{problem} Niech a, b będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi.
Udowodnij, że istnieją liczby dodatnie m, n , takie, że $ab \nmid a^m + b^n - 1$.
end{problem} item Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą, a a jest taką
liczbą całkowitą, że $a^p \equiv -1 \pmod{p}$ to $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$,
item $a^{2p} \equiv 1 \pmod{p}$. end{enumerate} item * Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$ będą
takie, że $a+b+c=0$. Rozstrzygnij, czy $a^{61} + b^{61} + c^{61}$ może być liczbą
pierwszą. item ** Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p , że liczba
 $2^{120!}-1$ jest podzielna przez p i nie jest podzielna przez p^2 .
emph{Wskazówka: ile wynosi $\phi(p^2)$?} end{enumerate} end{document}