



[&nbsp; Zadania PDF.](#)

## Źródło zadań w texu.

```
% File: zad.tex % Created: Tue Nov 09 10:00 PM 2010 C % Last Change: Tue Nov
09 10:00 PM 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt
headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} usepackage{wasysym}
%usepackage{MnSymbol} % ----- vfuzz4pt %
Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if
over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód. ]{noindenttextsc{#1}}
{nolinebreak[4]hfill$\blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{
noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}} {hfillpar}
defdeg{^{\circ}} defsourc#1{\Źródło: #1} %subimport{../}{style} include{style}
begin{document} setlength{topmargin}{-0.5in} section{Newton} subsection{Zadania}
begin{enumerate} item begin{problem} textbf{Symbol Newtona}
Jeżeli  $n \geq k \geq 0$  są liczbami naturalnymi, to przez  $\binom{n}{k}$  oznaczamy
współczynnik przy  $x^{n-k}y^k$  w~rozwinięciu (formalnym, przez wymnożenie
nawiasów) wyrażenia  $(x+y)^n$ , np.:  $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$ 
zatem  $\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1.$  Innymi słowy mamy kanoniczne
rozwinięcie (Newtona):  $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$ 
Symbol  $\binom{n}{k}$  czytamy `` $n$  po  $k$ '', takie symbole nazywamy symbolami
Newtona. emph{Osobom znającym już symbol Newtona zalecam rozwiązywać
```

---

poniższe podpunkty bez odwoływania się do tego, ile faktycznie  $\binom{n}{k}$  jest równe, a tylko do powyższej definicji.} % Uzasadnij, że  $\binom{n}{k}$  jest liczbą całkowitą dla dowolnych  $n$  i  $k$ ,  
 item Uzasadnij, że  $\binom{n}{k}$  jest liczbą całkowitą dla dowolnych  $n$  i  $k$ ,  
 item dowiedz, że jeżeli  $n \geq k \geq 1$  to  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .  
 emph{Wskazówka: Rozważ rozbicie  $(x+y)^n = (x+y)^{n-1} + y(x+y)^{n-1}$ .} item wykaż  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  dla dowolnych  $n$  i  $k$ ,  
 emph{Wskazówka: Czy współczynniki zmieniają się, jeśli zamienimy  $x$  z  $y$ ?} item pokaż  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  dla dowolnego  $n$ ,  
 item przez indukcję względem  $n$  udowodnij, że  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  
 (gdzie standardowo  $0! = 1$ ,  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ ). item dowiedz, że  $\binom{n}{k}$  jest ilością możliwych wyborów  $k$  elementów ze zbioru  $n$ -elementowego  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  
 emph{Więc to  $\binom{n}{k}$  nie jest aż tak nienaturalne, jakby się na pierwszy rzut oka wydawało }\$smiley\$ emph{Wskazówka: wyborowi elementów  $a_1, a_2, \dots, a_k$  przyporządkujmy wybór  $y$ -ów w nawiasach  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , a  $x$ -ów w pozostałych. Iloczyn tak wybranych  $x$ -ów i  $y$ -ów to  $x^{n-k} y^k$ , zatem liczy się on do  $\binom{n}{k}$ .}  
 end{enumerate} end{problem} phantom{.} item begin{problem}  
 textbf{Małe twierdzenie Fermata -- inny dowód.} Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą.  
 begin{enumerate} item Wykaż, że  $p \mid \binom{p}{k}$  dla każdego  $k: 0$