** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % ---------- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ---------- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} defsource#1{$ $\Źródło: #1} defo{operatorname{ord}} begin{document} title{II kółko -- Czy mamy dość teorii liczb?} date{27.10.09} maketitle paragraph{Teoria} begin{enumerate} item Małe twierdzenie Fermata: begin{thm}[Małe twierdzenie Fermata] Dla każdej liczby pierwszej p i liczby całkowitej a zachodzi $$p | a^p - a$$ end{thm} item begin{defn} Niech a, n będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. emph{Rzędem} liczby a modulo n nazywamy najmniejsze $kinmb{Z}_+$, takie, że $$a^k equiv 1 mod n$$ Rząd ten oznaczamy

przez $o(a, n)$ lub, gdy n jest znane, $o(a)$. end{defn} item begin{thm}[Lemat o rzędzie] Jeżeli a, k', n są takie, że $$a^{k'} equiv 1 mod n$$ to $displaystyle{o(a, n) | k'}$. end{thm} item begin{cor} Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, to $$o(a, p)|p-1$$ end{cor} end{enumerate} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Udowodnić, że dla liczby pierwszej p istnieje takie n naturalne, że $$p|2^n - n$$ source{Staszic} item Udowodnić, że dla liczby pierwszej p istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $$p|2^n - n$$ source{Staszic} item Rozstrzygnąć, dla jakich $kin mb{N}$ istnieje liczba naturalna n, będąca kwadratem liczby naturalnej i zaczynająca się w zapisie dziesiętnym k jedynkami. source{Mathlinks} item * Udowodnić, że równanie $$x^2 + y^2 + z^2 = (x-y)(y-z)(z-x)$$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x,y,z. source{Mathlinks} item * Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $$n^2 | 3^n + 1$$ source{Staszic} end{enumerate} paragraph{Zadania ,,lekcyjne"} begin{enumerate} item Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $$2^{n+1} | 3^{2^n} - 1$$ item Rozstrzygnąć, czy poniższe twierdzenie jest prawdziwe:\ Jeżeli $p>2$ jest liczbą pierwszą, zaś a jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że $p | a+1$, to $$p^{n+1} | a^{p^n} + 1$$ dla wszystkich liczb $nin mb{Z}_+$. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % ---------- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ---------- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{ToĹ›samoĹ›Ä‡} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} defsource#1{$ $\Źródło: #1} defo{operatorname{ord}} begin{document} defcomment#1{ [[#1]] } title{``Czy mamy dość teorii liczb?" - rozwiązania} author{Mateusz Jocz} date{} maketitle begin{enumerate} item Udowodnić, że dla liczby pierwszej p istnieje takie n naturalne, że $$p|2^n - n$$ source{Staszic} item Udowodnić, że dla liczby pierwszej p istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $$p|2^n - n$$ source{Staszic} textbf{Rozwiązanie:} begin{enumerate} item Jeżeli $p=2$ to teza jest spełniona dla $n=2$. Dalej zakładamy że $pneq2$. item Z małego twierdzenia Fermata mamy: [2^{p-1} equiv 1 mod p] Teraz na mocy textit{lematu o rzędzie} otrzymujemy $o(2,p)|p-1$. Z tego wynika, że liczby $o(2,p)$ i p są względnie pierwsze. item Wykażemy, że teza jest spełniona dla pewnego $n=kd$, gdzie

k jest całkowite, a $d=o(2,p)$. Dla każdego k, z definicji rzędu d, mamy: [(2^{d})^{k} equiv 1^{k}mod p] [2^{n} equiv 1mod p] item Rozważmy zbiór liczb $A={0,d,2d,ldots,(p-1)d}$. Wiemy, że p jest względnie pierwsze z d. Jeżeli istniałyby dwie liczby h i l $(0leq l