



[Zadania PDF.](#)



[Rozwiązania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
%      File: zadania.tex %      Created: pon lis 16 09:00 2009 C % Last Change: pon lis 16
09:00 2009 C % documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath}
textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep
0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc}
%usepackage{MnSymbol} % ----- vfuzz4pt %
Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if
over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{\mathbb{#1}} defrozv{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \}
defdeg{^{\circ}} defsourc#1{\Źródło: #1} include{style} begin{document}
section{Österreichische Mathematik Olympiade} Zwei Dinge sind unendlich, das Universum
und die menschliche Dummheit, aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher.
textit{Albert Einstein} paragraph{Łatwiejsze} begin{enumerate} item Dla jak wielu liczb
całkowitych $a$ takich, że $|a| \leq 2005$ układ równań begin{eqnarray} x^2 = y +
a\ y^2 = x + a end{eqnarray} ma rozwiązania w liczbach całkowitych
```

(x,y) ? item Mamy dwa przystające trójkąty równoboczne. Jeden z nich jest ustawiony w pewnym układzie współrzędnych "wierzchołkiem w dół", a drugi "wierzchołkiem w górę". Przecięcie tych trójkątów jest sześciokątem. Udowodnić, że odcinki łączące przeciwległe wierzchołki tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie. item Ustalić, dla jakich trójek liczb całkowitych dodatnich (a,b,c) liczba $a+b+c$ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością tych trzech liczb. item Mamy daną funkcję $f(x) = [x^2] + \{x\}$, gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż a , zaś $\{a\} = a - [a]$. Wykaż, że istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny liczb wymiernych, takich, że jeżeli liczba a należy do tego ciągu, to nie istnieje b takie, że $f(b) = a$.
footnotesize{Uwaga: Założenia tezy zostały osłabione w stosunku do wersji z olimpiady.} end{enumerate} paragraph{Trudniejsze} begin{enumerate} item Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele takich wielokrotności 2005, w których zapisie dziesiętnych cyfry 0,1,2,3,dots,9 występują wszystkie tyle samo razy (bez liczenia wiodących zer). item Liczby a,b,c,d są rzeczywiste dodatnie. Udowodnić, że $\frac{a+b+c+d}{abcd} \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$. item Trójkąt ABC jest ostrokątny. Rysujemy dwa okręgi k_1 i k_2 , których średnicami są odcinki AC i BC odpowiednio. Niech AD i BE będą wysokościami w ABC . Niech punkty $L \in N$ będą punktami przecięcia BE z k_1 , przy czym L leży bliżej B niż N oraz punkty $K \in M$ będą punktami przecięcia AD i k_2 , przy czym K leży bliżej A niż M . Udowodnić, że na czworokącie $KLMN$ da się opisać okrąg. item Niech Q będzie ustalonym punktem wewnątrz sześciianu K . Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele prostych l przechodzących przez Q , takich, że Q jest środkiem części wspólnej l i K . end{enumerate}
footnotesize{Wszystkie zadania pochodzą z Austriackiej Olimpiady Matematycznej}
end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

```

% File: zadania.tex % Created: pon lis 16 09:00 2009 C % Last Change: pon lis 16
09:00 2009 C % documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath}
textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep
0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc}
%usepackage[MnSymbol] % ----- vfuzz4pt %
Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if
over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{\mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \}
defrozwno#1{$ $\textbf{Rozwiązanie #1}: \} defdeg{^{\circ}} defsourc#1{Źródło: #1}
include{style} begin{document} section{Österreichische Mathematik Olympiade} Zwei Dinge
sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber beim Universum bin ich

```

mir nicht ganz sicher. $\text{textit{Albert Einstein}}$ $\text{paragraph{\L atwiejsze}}$ $\text{begin{enumerate}}$ item

Dla jak wielu liczb całkowitych a takich, że $|a| \leq 2005$ układ równań $\text{begin{eqnarray}}$

$$\begin{matrix} x^2 = y + a \\ y^2 = x + a \end{matrix}$$

ma rozwiązania w liczbach całkowitych (x, y) ? rozw $\text{begin{enumerate}}$ item Załóżmy, że liczby x, y, a spełniają dany układ równań. Wówczas odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy $x^2 - y^2 = y - x$ czyli $(x - y)(x + y + 1) = 0$. A więc $x = y$ albo $x + y = -1$, przy czym obie te sytuacje nie mogą zajść jednocześnie (gdyby zachodziły to $x = y = -1/2$).

item Rozważmy przypadek $x = y$. W tym przypadku liczby x, y, a spełniają układ równań $\text{begin{eqnarray}}$

$$\begin{matrix} x^2 = x + a \\ x^2 = x + a \end{matrix}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = x + a$ albo równanie: $x(x - 1) = x^2 - x = a$. Widać że dla danego x istnieje a spełniające warunki zadania wtedy i tylko wtedy gdy $x(x - 1) \leq 2005$. Można na uparteo szacować to wyrażenie rozwiązując równanie kwadratowe, albo zgadywać dla jakich x całkowitych to zachodzi (i potem szacować), tak czy inaczej nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \{-44, -43, \dots, 44, 45\}$.

item Chcemy teraz wyliczyć wartości $a = x(x - 1)$ dla x z powyższego przedziału. Niech $f(x) = x(x - 1)$. Zauważmy, że wartościami funkcji f dla liczb $\{-44, -43, \dots, 45\}$ są $-44 \cdot -45, -43 \cdot -44, \dots, 0 \cdot -1, 1 \cdot 0, \dots, 45 \cdot 44$. Bardziej formalnie: $f(-x + 1) = (-x + 1)(-x) = x^2 - x = x(x - 1) = f(x)$ a więc $f(0) = f(1), f(-1) = f(2), \dots$ oraz dla $x \geq 1$ jest $\text{begin{equation}} f(x + 1) = (x + 1)x = x^2 + x > x^2 - x + 1 = f(x) + 1. \text{end{equation}}$ Otrzymujemy 45 różnych możliwych wartości a : $f(1) = 1 \cdot 0 = 0, f(2) = 2 \cdot 1 = 2, \dots, f(45) = 45 \cdot 44$.

item Jeżeli zachodzi $x + y = -1$ to liczby x, y, a spełniają układ równań $\text{begin{eqnarray}}$

$$\begin{matrix} x^2 = -1 - x + a \\ (1 + x)^2 = x + a \end{matrix}$$

$\text{end{eqnarray}}$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniają równanie $x(x + 1) = x^2 + x = a - 1$ jest ono podobne do równania $x(x - 1) = x^2 - x = a$ z poprzedniego przypadku. Obliczamy jego rozwiązania analogicznie, otrzymując: $0 + 1 = 1, 2 + 1 = 3, \dots, 45 + 1 = 46$. Pozostaje uzasadnić, że powyższe wartości a i wartości a z poprzedniego przypadku: $0, 2, \dots, 45 \cdot 44$ są różne. Wynika to z $\text{ref{eqn:roznica}}$ po pewnym zastanowieniu: $0 \leq 1 \leq a + b + c \leq 2a + b + c \leq 3a + b + c \leq 4a + b + c \leq a + b + c$. A więc $a = 1$. Jeżeli $b = 1$ to $NWD(1, b, c) = NWD(1, 1, c) \neq 1 + 1 + c$. Jeżeli, z drugiej strony, $b > 2$ to $abc = bc \geq 3c > c + b + 1$. Musi zajść $b = 2$ i tym samym $3 + c = 2c, c = 3$. W tym przypadku $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

item Rozważmy dowolną trójkę liczb a, b, c spełniających warunki zadania. Trójka $a' = a/NWD(a, b, c), b' = b/NWD(a, b, c), c' = c/NWD(a, b, c)$ także spełnia warunki zadania. Ponadto $NWD(a', b', c') = 1$. Zachodzi $NWD(a', b') \mid NWD(a', b', c') = a' + b' + c'$, czyli $NWD(a', b') \mid c', a$ więc $NWD(a', b') \leq NWD(a', b', c') = 1$. Stąd wynika $NWD(a', b') = 1$. Analogicznie $NWD(a', c') = 1, NWD(b', c') = 1$. Liczby (a', b', c') są parami względnie pierwsze, czyli $(a', b', c') = (1, 2, 3)$. Tym samym $(a, b, c) = (k, 2k, 3k)$ gdzie $k = NWD(a, b, c)$. {footnotesize} Uwaga: Dla dowolnych liczb a, b, c nie ma implikacji $NWD(a, b, c) \rightarrow NWD(a, b) \neq 1$ np. dla $(a, b, c) = (2, 2, 3)$.

$\text{end{enumerate}}$ $\text{textbf{Odpowiedz:}}$ Trójka (a, b, c) jest równa pewnej permutacji

4 / 4