



[Zadania PDF.](#)



[Rozwiązania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
%      File: mlodsi.tex %      Created: Sun Mar 24 02:00 PM 2013 C % Last Change: Sun
Mar 24 02:00 PM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm,
textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem}
setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdftitle={0 0
0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -----
vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full
h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm}
stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{1.5cm}
includegraphics[origin=c,height=1.5cm]{headpicture}
end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center
#1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{}
```

```

end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{
vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][
stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}{ }
pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{\overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{\leqslant}
renewcommand{geq}{\geqslant} renewcommand{dots}{\ldots} defsectionwidth{8cm}
defheadpicture{wiosna} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{26 marca 2013}
begin{document} section{Czy to jest dowód?} subsection*{Zadania na kółko} emph{Należy
wybrać zadanie z~poniższych trzech i~postarać się rozwiązać je w~grupie; po wszystkim
każdy z~grupy powinien rozumieć, o~co chodzi w~rozwiązaniu i~umieć je wytłumaczyć.}
begin{problem} Suma dziesięciu liczb naturalnych jest równa $1001$. Wyznacz największą
możliwą wartość największego wspólnego dzielnika tych liczb. end{problem} begin{problem}
Wykaż, że kwadrat obwodu trójkąta jest większy niż dwunastokrotność jego pola.
end{problem} begin{problem} Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ liczba $5^n +
2\cdot 3^{n-1} + 1$ jest podzielna przez $8$. end{problem} vspace{1cm}
begin{center}***end{center} subsection*{Tytułowe zadanie.} Przypominam zadanie z~I~serii
Ligi zadaniowej: begin{problem} Sześcian $3\times 3\times 3$ podzielono cięciami na $27$
sześcianików $1\times 1\times 1$. Ile minimalnie było cięć? Cięcia muszą być proste,
tzn. być przecięciem wzdłuż płaszczyzny. Można jednocześnie ciąć kilka kawałków
sześcianu, ułożonych jeden na drugim. end{problem} begin{center} textbf{Pytanie:} Które
z~poniższych rozwiązań są właściwe? end{center} begin{sol}[Rozwiązanie I]
Uzasadnijmy, że minimalnie było sześć cięć. Rozważmy sześcianik $1\times 1\times 1$
znajdujący się początkowo w~środku dużego sześcianu. Musimy odciąć sześć ścianek tego
sześcianiku, a~każde cięcie wycina co najwyżej jedną. Potrzeba więc co najmniej sześciu
cięć. end{sol} begin{sol}[Rozwiązanie II] No więc, wiemy, że trzeba sześciu cięć, bo tnąc
normalnie równoległe do ścianek [tutaj jest rysunek] da radę ogarnąć w~sześciu cięciach; no
a~środkowy jest na początku połączony z~sześcioma sąsiednimi i~cięcie odczepia go
tylko od jednego, więc potrzeba co najmniej sześciu. end{sol} begin{sol}[Rozwiązanie III]
Minimalnie było $6$ cięć. end{sol} begin{sol}[Rozwiązanie IV] Wsadźmy sześcian
w~układ współrzędnych tak, żeby przeciwległe wierzchołki miały współrzędne $(0, 0, 0)$, $(3,
3, 3)$ a~krawędzie sześcianu były równoległe do osi układu. Tniemy wzdłuż płaszczyzn
przechodzących przez punkty $(1, 0, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(1, 0, 3)$; $(2, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$, $(2, 0, 3)$;
$(0, 1, 0)$, $(3, 1, 0)$, $(0, 1, 3)$; $(0, 2, 0)$, $(3, 2, 0)$, $(0, 2, 3)$; $(0, 0, 1)$, $(0, 3, 1)$, $(3, 0,
1)$; $(0, 0, 2)$, $(0, 3, 2)$, $(3, 0, 2)$. To daje nam podział na $27$ sześcianików w~sześciu
cięciach. end{sol} end{document}

```

Źródło rozwiązań w texu.

```

% File: mlodsi.tex % Created: Sun Mar 24 02:00 PM 2013 C % Last Change: Sun
Mar 24 02:00 PM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm,
textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}

```

```

usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem}
setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdftborder={0 0
0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -----
vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full
h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm}
stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{1.5cm}
includegraphics[origin=c,height=1.5cm]{headpicture}
end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center
#1} vskip 1mm small normalfont sc author{\ date{
end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. {
vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][
stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}{ }
pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant}
renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{8cm}
defheadpicture{wiosna} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{26 marca 2013}
begin{document} section{Czy to jest dowód?} subsection*{Zadania na kółko} emph{Należy
wybrać zadanie z~poniższych trzech i~postarać się rozwiązać je w~grupie; po wszystkich
każdy z~grupy powinien rozumieć, o~co chodzi w~rozwiązaniu i~umieć je wytłumaczyć.}
begin{problem} Suma dziesięciu liczb całkowitych dodatnich jest równa $1001$. Wyznacz
największą możliwą wartość największego wspólnego dzielnika tych liczb. end{problem}
begin{sol} Oznaczmy liczby przez $a_1, \dots, a_{10}$ i~niech $D$ oznacza ich
największy wspólny dzielnik. Skoro $D|a_1, D|a_2, \dots$ to $[D|a_1 + a_2 + \dots + a_{10} =
1001.]$ Ponadto, skoro $a_1/D, a_2/D, \dots$ są całkowite, to $[ \frac{1001}{D} =
\frac{a_1}{D} + \frac{a_2}{D} + \dots + \frac{a_{10}}{D} \geq 1 + 1 + \dots + 1 = 10, ]$ czyli
$1001 \geq 10 \cdot D$, stąd $100 \geq D$. Chcemy teraz znaleźć największe $D$ spełniające
podany warunek. Liczba $1001$ rozkłada się na $7 \cdot 13 \cdot 11$; nietrudno sprawdzić, że
największym jej dzielnikiem mniejszym od $100$ jest $D = 7 \cdot 13 = 91$. Dla $D =
91$ łatwo znaleźć odpowiednie liczby $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Są to $a_1 = a_2 = \dots =
a_9 = 91, a_{10} = 2 \cdot 91$. end{sol} begin{problem} Wykaż, że kwadrat obwodu
trójkąta jest większy niż dwunastokrotność jego pola. end{problem} begin{problem}
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ jest
podzielna przez $8$. end{problem} begin{sol} Najważniejszą obserwacją jest, że $5^2,
3^2$ dają resztę $1$ z~dzielenia przez $8$ i~nie liczą się". Wobec tego liczby $5^{2k} =
(5^2)^k$ oraz $3^{2k}$ także dają resztę $1$ z~dzielenia przez $8$.
Zapiszmy teraz $n = 2q + r$, gdzie $r \in \{0, 1\}$. Wtedy $5^n = 5^{2q} \cdot 5^r$, więc $5^n$
daje taką samą resztę z~dzielenia przez $8$ jak $5^r$. Podobnie, $3^n$ daje taką samą
resztę z~dzielenia przez $8$ jak $3^r$. Zysk z~całej operacji jest taki, że $r$ ma tylko
dwie możliwe wartości i~nie $r \in \{0, 1\}$. Popatrzmy na oba przypadki: begin{enumerate}
item Jeżeli $n$ jest parzysta, czyli $r = 0$, to $5^n$ daje resztę $1$, a~$3^{n-1}$ daje
resztę $3$, to liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ daje resztę $1 + 2 \cdot 3 + 1 = 8$, czyli
jest podzielna. item Jeżeli $n$ jest nieparzysta, to $r = 1$. W~tym przypadku

```

Zadania drużynowe dla młodszych

Wpisany przez Joachim Jelisiejew

wtorek, 26 marca 2013 18:59 - Poprawiony wtorek, 26 marca 2013 19:27

5^n daje resztę 5 z~dzielenia przez 8 , zaś 3^{n-1} daje resztę 1 z~dzielenia przez 8 . Liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ daje więc resztę $5 + 2 \cdot 1 + 1 = 8$ z~dzielenia przez 8 , czyli jest podzielna. $\end{enumerate} \end{sol}$

$\begin{sol}$ [II rozwiązanie] $\emph{\text{To rozwiązanie korzysta z~kongruencji, i~mówi dokładnie to samo, co poprzednie, tylko innym językiem. Kongruencje są opisane w~pliku 123infy, zachęcam ogólnie do czytania -- ma jedynie 14 stron.}}$ Zauważmy, że $5^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Zapiszmy $n = 2q + r$, gdzie $r \in \{0, 1\}$. Wtedy $5^n = \left(5^2\right)^q \cdot 5^r \equiv 1^q \cdot 5^r = 5^r \pmod{8}$, $\quad \quad \quad \text{analogicznie}$ $3^{n-1} \equiv 3^{n+1} \equiv 3^{r+1} \pmod{8}$. $\quad \quad \quad \text{Analizujemy przypadki } r = 0 \text{ i } r = 1$:

$\begin{enumerate}$ $\quad \quad \quad \text{item Jeżeli } r = 0 \text{ to } 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \equiv 1 + 2 \cdot 3 + 1 \equiv 0 \pmod{8}$. $\quad \quad \quad \text{item Jeżeli } r = 1 \text{ to } 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \equiv 5 + 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \pmod{8}$. $\end{enumerate} \end{sol} \quad \quad \quad \text{end\{document\}}$