

Przypomnijmy, że dziedzina Euklidesa A ma normę $N : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ taką, że dla dowolnych dwóch niezerowych elementów $a, b \in A$ mamy $a = b \cdot c + r$, gdzie $r = 0$ lub $N(r) < N(b)$. Wiadomo, że pierścienie $\mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$, gdzie $\alpha \in \mathbb{Z}$, z normą $N(a + b\sqrt{\alpha}) = |a^2 - b^2\alpha|$ są Euklidesa dla $\alpha = -2, -1, 2, 3$, zobacz np. skrypt. Dowód (tamże) pokazuje jak dzielić z resztą w tych pierścieniach:

- niech $a = a_1 + a_2\sqrt{\alpha}$, $b = b_1 + b_2\sqrt{\alpha}$, wówczas w $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}]$ mamy

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1b_1 - a_2b_2\alpha}{b_1^2 - b_2^2\alpha} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 - b_2^2\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} = c'_1 + c'_2\sqrt{\alpha}$$

- wybieramy liczby całkowite c_1, c_2 takie, że $|c_i - c'_i| \leq \frac{1}{2}$ i kładziemy $c = c_1 + c_2\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$
- kładziemy $r = a - b \cdot c$

1. Podziel z resztą

- $10 + 2i$ przez $-1 + 3i$ w $\mathbb{Z}[i]$
- $5 + \sqrt{2}$ przez $2 - \sqrt{2}$ w $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
- $5 + \sqrt{-2}$ przez $1 + \sqrt{-2}$ w $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

2. Przypomnijmy, że $(a_1, a_2, \dots)$ oznacza ideał generowany w pierścieniu A przez elementy $a_1, a_2, \dots \in A$. Sprawdź czy następujące ideały są równe:

- $(12 + 17i, 3 + 2i)$ oraz $(1 + i)$ w $\mathbb{Z}[i]$,
- $(x^3 + x^2 + x + 1, x + 1)$ oraz $(x + 1)$ w $\mathbb{Z}[x]$,
- $(x^2 + x - 6)$ oraz $(x + 3) \cap (x - 2)$ w $\mathbb{Q}[x]$,
- $(x^3 - 1)$ oraz $(x - 1)$ w $\mathbb{Z}_3[x]$,
- $(2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots)$ oraz $(4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \dots)$ w pierścieniu $\mathbb{Q}[[x]]$.

3. Sprawdź czy następujące ideały są główne, tzn. czy mają jeden generator:

- (x^2, x^3) w pierścieniu $\mathbb{Q}[x^2, x^3]$,
- $(2, 1 + \sqrt{5})$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$,

- (c) (x, y) w pierścieniu $\mathbb{C}[x, y]$,
 - (d) $(2, x)$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$,
 - (e) $(18, 81)$ w pierścieniu $\mathbb{Q}_{(3)}$.
4. Rozpatrzmy pierścień który jest produktem dwóch ciał $A = K_1 \times K_2$.
Znajdź wszystkie ideały w A .
 5. Znajdź wszystkie ideały w pierścieniu $\mathbb{Z}_n$.
 6. Pokaż, że każdy ideał w $\mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$ jest generowany przez dwa elementy i jest postaci $(a, b + c\sqrt{\alpha})$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wskazówka: dla dowolnego ideału $I \triangleleft \mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$ pokaż najpierw, że $I \cap \mathbb{Z}$ jest ideałem oraz liczby $c \in \mathbb{Z}$, takie że $b + c\sqrt{\alpha} \in I$, też stanowią pewien ideał w $\mathbb{Z}$.