

1. Na poprzednich ćwiczeniach zdefiniowaliśmy funkcję μ na szeregach formalnych $\mu : k[[x]] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$:

$$\mu \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) = \min\{i : a_i \neq 0\}$$

oraz $\mu(0) = \infty$.

- (a) Pokaż, że $\mu(f \cdot g) = \mu(f) + \mu(g)$ oraz $\mu(f + g) \geq \min\{\mu(f), \mu(g)\}$
- (b) Pokaż, że dwa szeregi formalne $f, g \in k[[x]]$ są stowarzyszone wtedy i tylko wtedy gdy $\mu(f) = \mu(g)$.
2. Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy podzbiór $\mathbb{A}_{(p)} \subset \mathbb{Q}$ składający się z ułamków, których mianownik nie jest podzielny przez p :

$$\mathbb{Q}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\}$$

- (a) Pokaż, że $\mathbb{Q}_{(p)}$ jest pierścieniem i dziedziną, znajdź elementy odwracalne w $\mathbb{Q}_{(p)}$.
- (b) Pokaż, że dwa ułamki nieskracalne $\frac{a_1}{b_1}$ i $\frac{a_2}{b_2}$ są stowarzyszone w $\mathbb{Q}_{(p)}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $r \geq 0$ zachodzi $p^r | a_1 \Leftrightarrow p^r | a_2$.
- (c) Pokaż, że na $\mathbb{Q}_{(p)}$ można zdefiniować funkcję μ , która ma podobne własności jak ta w poprzednim zadaniu.
3. Znajdź ogólną postać elementów nierozkładalnych i pierwszych w następujących dziedzinach:
- pierścieniu wielomianów $k[x]$, gdzie $k = \mathbb{R}$ lub $k = \mathbb{C}$,
 - pierścieniu szeregów formalnych $k[[x]]$, gdzie k jest dowolnym ciałem,
 - pierścieniu $\mathbb{Q}_{(p)}$ zdefiniowanym powyżej.
4. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:
- (a) liczba p jest rozkładalna w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$,

- (b) $p = z \cdot \bar{z}$, gdzie $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \mathbb{Z}$,
- (c) p jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.
5. Następujące wielomiany rozłóż na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach wielomianów:
- (a) $x^4 - 1$ w $\mathbb{Z}[x]$ i w $\mathbb{Z}[i][x]$
- (b) $x^4 - 2$ w $\mathbb{Q}[x]$ i w $\mathbb{R}[x]$
- (c) $x^6 - 5$ w $\mathbb{R}[x]$ i w $\mathbb{C}[x]$
6. Sprawdź rozkładalność następujących elementów w podanych pierścieniach:
- (a) $10 - 11i$ w $\mathbb{Z}[i]$; skorzystaj ze standardowej normy, która jest multiplikatywna $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- (b) 2 w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$; skorzystaj z normy $\nu(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$, która też jest multiplikatywna (pokaż to).
7. Podaj przykład elementu, który jest nierozkładalny ale nie jest pierwszy w pierścieniu
- (a) $k[x^2, x^3]$
- (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Szkic rozwiązania zadania o pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Najpierw dwie ogólne uwagi o normie dla liczb postaci $a + b\sqrt{\alpha}$, która można zdefiniować jako $\nu(a + b\sqrt{\alpha}) = a^2 - b^2\alpha$.

- Sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \nu((a_1 + b_1\sqrt{\alpha})(a_2 + b_2\sqrt{\alpha})) &= |(a_1a_2 + b_1b_2\alpha)^2 - (a_1b_2 + b_1a_2)^2\alpha| = \\ &= |(a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2\alpha^2) - (a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2)\alpha| = |a_1^2 - b_1^2\alpha| \cdot |a_2^2 - b_2^2\alpha| = \\ &= \nu(a_1 + b_1\sqrt{\alpha}) \cdot \nu(a_2 + b_2\sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

- Wnioskujemy, że jeśli $u = a + b\sqrt{\alpha}$ jest odwracalny to $\nu(u) = 1$. Z drugiej strony $\nu(u) = (a + b\sqrt{\alpha})(a - b\sqrt{\alpha})$ więc jeśli $\nu(u) = 1$ to u ma element odwrotny.

- Element 2 nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ bo jego norma wynosi 4 więc jeśli miałby rozkład na nieodwracalne to miałyby normę 2. Z drugiej strony, jeśli $\nu(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 = 2$ to w ciele $\mathbb{Z}_5$ istniałby element a taki, że $a^2 = 2 \pmod{5}$ a łatwo sprawdzić, że tak nie jest.
- Zauważmy, że $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{5}) \cdot (-1 + \sqrt{5})$ i 2 nie dzieli ani $1 + \sqrt{5}$ ani $-1 + \sqrt{5}$ więc 2 nie jest elementem pierwszym w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.