

Pierścień wielomianów od jednej zmiennej o współczynnikach w pierścieniu A oznaczmy $A[x]$. Stopień wielomianu $f \in A[x]$, który oznaczmy $\deg f$ definiujemy następująco: jeśli $f = a_n x^n + \dots + a_0$ i $a_n \neq 0$, to $\deg f = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Umawiamy się, że $\deg 0 = -\infty$. Element $a_n \in A$ nazywamy wiodącym współczynnikiem f . Jeśli $a_n = 1$, to f nazywamy unormowanym.

Pierścień

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

nazywamy pierścieniem liczb Gaussa.

Pierścień szeregów formalnych nad ciałem k , oznaczany $k[[x]]$, to zbiór formalnych sum

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

gdzie $a_i \in k$. Element zerowy tego pierścienia to 0, jedynka to 1. Sumę dwóch szeregów $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ i $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ definiujemy jako

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

natomiast iloczyn jako

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

1. Pokaż, że następujące dwa warunki są równoważne w pierścieniu A :

- w pierścieniu A nie ma nietrywialnych dzielników zera
- w pierścieniu A można skracać mnożenie, czyli: jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ i $a \neq 0$, to $b = c$.

Pierścień spełniający powyższe warunki nazywamy dziedziną. Pokaż przykłady pierścieni, które nie są dziedzinami.

2. Załóżmy, że pierścień A jest skończony, $|A| < \infty$. Pokaż, że A jest dziedziną wtedy i tylko wtedy kiedy jest ciałem. Implikacja “ A ciało $\implies A$ dziedzina” jest zawsze prawdziwa; żeby dowieść przeciwnej dla dowolnego $a \in A$ rozpatrz odwzorowanie $A \ni b \rightarrow a \cdot b \in A$ i zauważ, że dla dziedziny jest ono różnowartościowe.
3. Znajdź elementy odwracalne i dzielniki zera w następujących pierścieniach:
 - (a) pierścieniu wielomianów $k[x]$, gdzie k jest dowolnym ciałem,
 - (b) pierścieniu reszt $\mathbb{Z}_n$,
 - (c) pierścieniu liczb Gaussa $\mathbb{Z}[i]$,
 - (d) pierścieniu szeregów formalnych $k[[x]]$, gdzie k jest dowolnym ciałem.
4. Pokaż, że dla dowolnych dwóch wielomianów $f, g \in A[X]$ zachodzi:
 - (a) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$,
 - (b) $\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g$,
 - (c) jeśli A jest dziedziną, to $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Umawiamy się, że $-\infty$ jest mniejsze niż jakakolwiek liczba oraz dodanie $-\infty$ do jakiegokolwiek liczby daje $-\infty$.
5. Znajdź wynik dzielenia z resztą f przez g w następujących przypadkach:
 - (a) $f = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$, $g = x^2 + 2x + 3$ w $\mathbb{Q}[x]$,
 - (b) $f = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $g = x^2 + x - 1$ w $\mathbb{Z}_3[x]$,
 - (c) $f = x^8 + 1$, $g = x^2 - i$ w $\mathbb{Z}[i][x]$.
6. Korzystając z twierdzenia Bezout znajdź wszystkie wielomiany nierozkładalne unormowane stopnia ≤ 3 w $\mathbb{Z}_3[x]$.
7. Mając dane pierścienie A_1, A_2 można zdefiniować ich produkt podobnie jak produkt prosty grup, ustalając operacje “po współrzędnych” w produkcie kartezjańskim $A_1 \times A_2$. Pokaż, że produkt pierścieni nigdy nie jest dziedziną.

8. Dla dowolnego ciała k definiujemy pierścień $k[\epsilon]$ jako dwuwymiarową przestrzeń wektorową nad k rozpiętą przez 1 i ϵ , czyli

$$k[\epsilon] = \{a + b\epsilon : a, b \in k\}$$

Dodawanie definiujemy po współrzędnych, natomiast mnożenie tak żeby $\epsilon^2 = 0$, czyli

$$(a_1 + b_1\epsilon) \cdot (a_2 + b_2\epsilon) = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\epsilon$$

znajdź elementy odwracalne i dzielniki zera w $k[\epsilon]$.

9. Rozpatrzmy dwuwymiarową przestrzeń liniową $\mathbb{F}_4$ nad ciałem $\mathbb{Z}_2$ (czasami $\mathbb{Z}_2$ oznaczmy przez $\mathbb{F}_2$) o bazie 1 i ν . Definiujemy mnożenie w $\mathbb{F}_4$ tak żeby $\nu^2 = 1 + \nu$, czyli

$$(a_1 + b_1\nu) \cdot (a_2 + b_2\nu) = (a_1a_2 + b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2)\nu$$

Pokaż, że $\mathbb{F}_4$ jest pierścieniem, dziedziną i ciałem. Pokaż, że każde ciało, które ma 4 elementy, jest izomorficzne z $\mathbb{F}_4$.

10. Rozpatrzmy podpierścień $k[x^2, x^3] \subset k[x]$ w pierścieniu wielomianów jednej zmiennej.

- Pokaż, że elementy x^2 i x^3 są w tym pierścieniu nierozkładalne.
- Pokaż, że pierścień $k[x^2, x^3]$ nie ma własności jednoznacznego rozkładu.