

Przypomnijmy, że centralizator elementu $g \in G$ to podgrupa $C_G(g) = \{g' \in G : g' \cdot g = g \cdot g'\} < G$.

1. Rozpatrzmy grupę kwaternionów $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
 - (a) Znajdź grupę ilorazową $\mathbb{H}_8 / \langle -1 \rangle$.
 - (b) Pokaż, że jeśli jest dany homomorfizm $\varphi : \mathbb{H}_8 \rightarrow G$ taki, że $\varphi(-1) \neq 1_G$, to φ ma trywialne jądro.
 - (c) Ile jest różnych homomorfizmów $\mathbb{H}_8 \rightarrow (\mathbb{Z}_4)^3$?
 - (d) Ile jest różnych homomorfizmów $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{H}_8$?
2. Rozpatrzmy grupę izometrii kwadratu $\mathbb{D}_8 = \langle \rho, \epsilon \rangle$, gdzie ρ oznacza obrót natomiast ϵ oznacza odbicie.
 - (a) Znajdź iloraz grupy $\mathbb{D}_8$ przez jej centrum i opisz warstwy.
 - (b) Pokaż, że jeśli jest dany homomorfizm $\varphi : \mathbb{D}_8 \rightarrow G$ taki, że $\varphi(\rho^2) \neq 1_G$, to φ ma trywialne jądro.
 - (c) Ile jest różnych homomorfizmów $\mathbb{D}_8 \rightarrow (\mathbb{Z}_4)^3$?
 - (d) Ile jest różnych homomorfizmów $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{D}_8$?
3. Opisz centralizator oraz klasę sprzężoności następujących elementów w następujących grupach:
 - (a) permutacji $(1, 2, \dots, n)$ w grupie permutacji $\mathbb{S}_n$,
 - (b) permutacji $(1, 2, \dots, n)$ w grupie permutacji parzystych $\mathbb{A}_n$, gdzie n jest nieparzyste,
 - (c) permutacji $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ w grupie $\mathbb{S}_6$,
 - (d) permutacji $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ w grupie $\mathbb{A}_6$,
 - (e) permutacji $(1, 2), (3, 4), (5, 6)$ w grupie $\mathbb{S}_6$,
 - (f) odbicia ϵ w grupie $\mathbb{D}_{2n}$ izometrii n -kąta foremnego, gdzie n jest nieparzyste,
 - (g) odbicia ϵ w grupie $\mathbb{D}_{2n}$ izometrii n -kąta foremnego, gdzie n jest parzyste.

4. Rozpatrzmy grupę $\mathbb{T}(2, k)$ macierzy odwracalnych górnótrójkatnych 2×2 nad ciałem k . Rozpatrz następujące podgrupy grupy $\mathbb{T}(2, k)$, ustal które są normalne i znajdź grupę ilorazową:

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in k \right\}$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} c & a \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : a \in k, c \in k^* \right\}$$

$$(c) \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in k^* \right\}$$

$$(d) \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : b, c \in k^* \right\}$$

5. Załóżmy, że grupa G działa tranzytywnie na zbiorze X . Pokaż że dla każdej pary $x_1, x_2 \in X$ istnieje $g \in G$ takie, że $G_{x_1} = g \cdot G_{x_2} \cdot g^{-1}$.

- (a) Pokaż, że jeśli skończona grupa abelowa G działa tranzytywnie na zbiorze X , czyli mamy homomorfizm $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$, i oznaczmy $H = \ker \varphi$, to wybór $x_0 \in X$ zadaje bijekcję $\psi_0 : X \rightarrow G/H$ taką, że $\psi_0(g(x_0)) = gH$.
- (b) Pokaż, że jeśli $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{H}_8 \rightarrow \text{Bij}(\{1, 2, 3, 4\})$ to dwa tranzytywne działania $\mathbb{H}_8$ na zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$, to istnieje permutacja $\sigma \in \mathbb{S}_4$ taka, że $\sigma \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma$.
- (c) Pokaż, że powyższy punkt nie będzie prawdziwy jeśli zastąpić $\mathbb{H}_8$ przez $\mathbb{D}_8$.