

Przypomnijmy, że klasa sprzężoności elementu h w grupie G to zbiór $\{g \cdot h \cdot g^{-1} : g \in G\}$ czyli orbita h przy działaniu G na sobie przez sprzężenia. Elementy $g_1, g_2 \in G$ są sprzężone jeśli leżą w tej samej klasie sprzężoności. Podgrupa H w G jest normalna jeśli dla każdego $g \in G$ zachodzi $gHg^{-1} = H$, czyli jeśli jest H niezmiennicza przy działaniu G na sobie przez sprzężenia.

1. Załóżmy, że grupa G zawiera podgrupy H_1 i H_2 , takie że $H_1 \cap H_2 = \{1_G\}$ oraz elementy H_1 są przemiennie z elementami z H_2 , czyli dla każdej pary $h_i \in H_i$ zachodzi $h_1 h_2 = h_2 h_1$. Pokaż, że odwzorowanie

$$H_1 \times H_2 \ni (h_1, h_2) \longrightarrow h_1 h_2 \in G$$

jest homomorfizmem i ma trywialne jądro.

2. Niech G będzie grupą skończoną zawierającą dwie podgrupy normalne $H_1, H_2 \triangleleft G$, których przecięcie jest trywialne, czyli $H_1 \cap H_2 = \{1_G\}$. Załóżmy, że $|G| = |H_1| \cdot |H_2|$. Pokaż, że grupa G jest izomorficzna z produktem $H_1 \times H_2$.
3. Załóżmy, że G jest grupą rzędu p^2 , gdzie p jest liczbą pierwszą. Pokaż, że G jest albo cykliczna, albo izomorficzna z $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
4. Pokaż, że nieabelowe grupy rzędu 8 to grupa kwaternionów $\mathbb{H}_8$ i grupa dihedralna $\mathbb{D}_8$.
5. Dla podanej poniżej grupy G znajdź wszystkie podgrupy normalne $H \triangleleft G$ oraz odpowiadające im grupy ilorazowe G/H . Wykorzystaj fakt: jeśli $h \in H \triangleleft G$ to klasa sprzężoności h jest zawarta w H .

- (a) $G = \mathbb{Z}_n$, grupa cykliczna rzędu n , gdzie $n > 1$;
- (b) $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą,
- (c) $G = \mathbb{H}_8$, grupa kwaternionów;
- (d) $G = \mathbb{D}_8$, grupa izometrii kwadratu;
- (e) $G = \mathbb{S}_3$.

6. Znajdź wszystkie klasy sprzężoności elementów w grupie $\mathbb{S}_4$, podaj rząd elementu w każdej klasie i policz moc każdej z klas. Następnie ustal jakie podgrupy normalne zawiera grupa $\mathbb{S}_4$ i znajdź wszystkie grupy, na które $\mathbb{S}_4$ odwzorowuje się suriektywnie.
7. Niech H będzie podgrupą normalną grupy G czyli $H \triangleleft G$. Pokaż, że jeśli $h_1, h_2 \in H$ są sprzężone jako elementy grupy H to są sprzężone jako elementy grupy G . Pokaż, że implikacja odwrotna nie musi być prawdziwa: podaj przykład w którym h_1 i h_2 są sprzężone jako elementy grupy G ale nie są sprzężone jako elementy grupy H .
8. Pokaż, że odwzorowanie $\varphi : G \rightarrow G$ zadane wzorem $\varphi(g) = g^{-1}$ jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy grupa G jest abelowa.

Materiał empiryczny: lista znanych grup rzędu 8. W kolejnych wierszach liczba elementów rzędu podanego w pierwszej kolumnie

rzad	$\mathbb{Z}_8$	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{D}_8$	$\mathbb{H}_8$
1	1	1	1	1	1
2	1	7	3	5	1
4	2	0	4	2	6
8	4	0	0	0	0

Dlaczego jest parzysta liczba elementów rzędu 4? Ile podgrup izomorficznych z $\mathbb{Z}_4$ zawiera każda z tych grup?