

Przypomnijmy, że grupa G działa na sobie przez sprzężenia $G \rightarrow \text{Aut}(G)$, tak że $g \mapsto \varphi_g$, gdzie $\varphi_g(g') = gg'g^{-1}$.

1. Niech $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ będzie homomorfizmem grup. Pokaż, że jądro $\ker \phi = \{g \in G_1 : \phi(g) = e_{G_2}\}$ jest podgrupą normalną.
2. Przypomnijmy, że jeśli grupa G działa tranzytywnie na zbiorze X , to dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $[G : G_x] = |X|$. Przypomnijmy również, że o ile G działa na zbiorze X , to X ma rozkład na rozłączne podzbiory będące orbitami działania G . Pokaż, że w każdym z następujących przypadków istnieje $x \in X$ takie, że $G \cdot x = x$ lub równoważnie $G_x = G$ (taki x nazywamy punktem stałym działania G). Jeśli to możliwe, to podaj minimalną liczbę takich x .
 - (a) $|G| = p$, gdzie p to liczba pierwsza, oraz moc $|X|$ skończona, niepodzielna przez p .
 - (b) $|G| = p^r$, gdzie p jest liczbą pierwszą, oraz $|X|$ jest liczbą niepodzielną przez p .
 - (c) $|G| = 21$ oraz $|X| = 8$ lub $|X| = 11$.
3. Niech G będzie grupą rzędu p^r , gdzie p jest liczbą pierwszą. Pokaż, że G ma nietrywialne centrum. Wykorzystaj poprzednie zadanie dla działania G na sobie przez sprzężenia; zauważ, że to działanie G zachowuje element neutralny e_G więc G działa na zbiorze $X = G \setminus \{e_G\}$, który ma moc $p^r - 1$.
4. Niech G będzie grupą rzędu p^r . Pokaż, że liczba podgrup grupy G , które nie są normalne, jest podzielna przez p . Wykorzystaj fakt, że G działa na zbiorze wszystkich grup przez sprzężenia, czyli $g \in G$ przekształca podgrupę $H < G$ w podgrupę $gHg^{-1} < G$. Zauważ, że podgrupy normalne są punktami stałymi tego działania.
5. Przypomnijmy, że klasą sprzężoności elementu $g \in G$ nazywamy jego orbitę przy działaniu G na sobie przez sprzężenia. Czyli elementy g_1 i g_2 są sprzężone jeśli $\exists h \in G : g_1 = hg_2h^{-1}$. Opisz klasy sprzężoności w następujących grupach; podaj typowe elementy w każdej klasie oraz dla skończonych grup liczbę elementów w klasie:

- (a) w dowolnej grupie abelowej
 - (b) w grupie kwaternionów $\mathbb{H}_8$
 - (c) w grupie dihedralnej $\mathbb{D}_{2n}$
 - (d) w grupie permutacji $\mathbb{S}_n$, dla $n = 4, 5$
 - (e) w grupie macierzy odwracalnych 2×2 nad $\mathbb{C}$, $GL(2, \mathbb{C})$
6. Załóżmy, że G jest grupą rzędu pq , gdzie $q > p$ to różne liczby pierwsze oraz p nie dzieli $q - 1$.
- (a) Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego wywnioskuj, że istnieją elementy a i b rzędu p i odpowiednio q . Pokaż, że jeśli są przemienne, czyli $ab = ba$, to G jest grupą cykliczną generowaną przez ab .
 - (b) Niech $H_p = \langle a \rangle$, $H_q = \langle b \rangle$. Pokaż, że jeśli $bab^{-1} \notin H_p$, to G zawiera co najmniej $q(p - 1)$ elementów rzędu p . Pokaż, że jeśli $aba^{-1} \notin H_q$, to G zawiera co najmniej $p(q - 1)$ elementów rzędu q .
 - (c) Pokaż, że jeśli $aH_q = H_qa$ lub $bH_p = H_pb$, to grupa G jest cykliczna. Wykorzystaj działanie przez sprzężenia H_p na H_q lub odwrotnie i fakt, że sprzężenia permutują elementy nietrywialne.
 - (d) Użyj powyższych stwierdzeń do dowodu, że grupa G spełniająca warunki zadania jest cykliczna.
7. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą i G grupą rzędu $2p$. Dowiedz następujących stwierdzeń.
- (a) Jeśli G jest abelowa, to jest cykliczna, izomorficzna z $\mathbb{Z}_{2p}$.
 - (b) Jeśli G nie jest abelowa, to ma p elementów rzędu 2 i normalną podgrupę cykliczną rzędu p .
 - (c) Jeśli G nie jest abelowa, to jest izomorficzna z dihedralną $\mathbb{D}_{2p}$.