

Produkt grup G_1 i G_2 definiujemy jako zbiór $G_1 \times G_2$ z działaniami zdefiniowanymi po współrzędnych czyli $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$ oraz

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 \cdot g'_1, g_2 \cdot g'_2)$$

Podgrupę $H < G$ nazywamy podgrupą normalną, co oznaczamy $H \triangleleft G$, jeśli jej lewe i prawe warstwy w G są takie same; czyli

$$H \triangleleft G \iff \forall g \in G \quad gH = Hg$$

1. Załóżmy, że liczby całkowite dodatnie a i b są względnie pierwsze. Pokaż, że grupa $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ jest izomorficzna z grupą cykliczną $\mathbb{Z}_{ab}$. Uzasadnij dlaczego grupa $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_a$ nie jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_{a^2}$.
2. Pokaż, że dla $i = 1, 2$ rzutowanie $p_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$, takie że $p_i(g_1, g_2) = g_i$ jest homomorfizmem grup. Załóżmy, że dana jest grupa H z homomorfizmami $h_i : H \rightarrow G_i$. Pokaż, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : H \rightarrow G_1 \times G_2$ spełniający warunek $p_i \circ h = h_i$ dla $i = 1, 2$.
3. Niech G będzie grupą, w której każdy element jest rzędu ≤ 2 . Pokaż, że G jest grupą przemienną. Pokaż, że jeśli dodatkowo G jest grupą skończoną, to G jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}_2^n$ czyli n -krotnym produktem grupy $\mathbb{Z}_2$.
4. Przypomnijmy, że grupa G działa na sobie za pomocą automorfizmów wewnętrznych $g(g') = gg'g^{-1}$. Pokaż, że podgrupa $H < G$ jest normalna wtedy i tylko wtedy gdy jest zachowywana (jako zbiór) przez każdy automorfizm wewnętrzny. Wykorzystaj tę obserwację by pokazać:

$$(a) \quad H_1, H_2 \triangleleft G \implies H_1 \cap H_2 \triangleleft G$$

$$(b) \quad H_1 \triangleleft G_1, H_2 \triangleleft G_2 \implies H_1 \times H_2 \triangleleft G_1 \times G_2$$

5. Przypomnijmy definicję centrum grupy

$$Z(G) = \{g \in G : \forall g' \in G \quad gg' = g'g\}$$

$$(a) \quad \text{Pokaż, że } Z(G) \triangleleft G$$

$$(b) \quad \text{Pokaż, że } Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2) \subseteq G_1 \times G_2.$$

6. Znajdź wszystkie podgrupy normalne następujących grup
- (a) kwaternionów $\mathbb{H}_8$
 - (b) izometrii pięciokąta $\mathbb{D}_{10}$
 - (c) izometrii sześciokąta $\mathbb{D}_{12}$
 - (d) permutacji $\mathbb{S}_4$
7. Niech G oznacza grupę izometrii sześciianu, zob. <http://sage2.mimuw.edu.pl/home/pub/105/>. Można założyć, że wierzchołki sześciianu w $\mathbb{R}^3$ mają współrzędne $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Sześciian ma cztery przekątne łączące przeciwległe wierzchołki. Każde przekształcenie $g \in G$ wyznacza permutację przekątnych, co daje odwzorowanie $\varphi : G \rightarrow \mathbb{S}_4$.
- (a) Pokaż, że φ jest suriektywnym homomorfizmem.
 - (b) Pokaż, że jądro φ jest dwuelementową grupą generowaną przez symetrię środkową.
 - (c) Rozpatrzmy przekształcenie $\phi : G \rightarrow \mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$ zdefiniowane wzorem $\phi(g) = (\varphi(g), \det(g))$, gdzie $\det(g)$ oznacza wyznacznik przekształcenia liniowego g . Pokaż, że ϕ jest izomorfizmem.
 - (d) Pokaż, że centrum G to dwuelementowa grupa generowana przez symetrię środkową, zob. zadanie 5d z poprzedniej serii.