

Przypomnijmy, że działanie grupy G na zbiorze X , to homomorfizm $G \rightarrow \text{Bij}(X)$; innymi słowy każdy element g działa jak bijekcja $x \mapsto g(x)$. Dla dowolnego $x \in X$ orbita x to $Gx = \{g(x) : g \in G\} \subseteq X$, stabilizator lub grupa izotropii dla $x \in X$ to $G_x = \{g \in G : g(x) = x\} \subseteq G$. Mówimy, że G działa na X tranzytywnie jeśli działanie ma tylko jedną orbitę.

1. Załóżmy, że grupa G działa na zbiorze X . Pokaż, że stabilizator $x \in X$ jest podgrupą w G . Pokaż, że relacja $x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G : x_1 = g(x_2)$ jest relacją równoważności, której klasy abstrakcji to orbity działania G .
2. Rozpatrzmy podgrupę $H < G$. Definiujemy działanie H na G z lewej strony wzorem $H \times G \ni (h, g) \mapsto h(g) = h \cdot g$ oraz działanie z prawej strony $H \times G \ni (h, g) \mapsto h(g) = g \cdot h^{-1}$.
 - (a) Pokaż, że powyższe działania są dobrze zdefiniowane i grupa izotropii dla każdego $g \in G$ jest trywialna.
 - (b) Pokaż, że orbity wyżej zdefiniowanych działań to zbiory postaci $Hg = \{h \cdot g : h \in H\}$ oraz $gH = \{g \cdot h : h \in H\}$; nazywamy je warstwami prawymi, odpowiednio lewymi, grupy H w grupie G .
 - (c) Pokaż, że każda warstwa ma tyle elementów co grupa H . Wywnioskuj z tego twierdzenie Lagrange'a: jeśli $|G| < \infty$ to $|H|$ dzieli $|G|$.
 - (d) Liczbę warstw lewych (lub prawych) H w G oznaczmy $[G : H]$ i nazywamy indeksem podgrupy H w grupie G . Pokaż, że jeśli G jest skończona, to $|G|/|H| = [G : H]$. Podaj przykład grupy nieskończonej i jej podgrup skończonego indeksu.
 - (e) Pokaż, że jeśli G jest grupą abelową to warstwy lewe są takie same jak prawe. Pokaż, że jeśli grupa G nie jest abelowa, to tak nie musi być; podaj przykład.
3. Zbiór lewych warstw H w G oznaczamy G/H , zbiór warstw prawych $G \backslash H$. Pokaż, że mamy działanie G na $G \backslash H$ zadane wzorem $g(g'H) = (g \cdot g')H$. Pokaż, że mamy działanie G na G/H zdefiniowane podobnie $g(Hg') = H(g' \cdot g^{-1})$. Pokaż, że te działania są tranzytywne.
4. Niech $\text{Aut}(G)$ oznacza zbiór automorfizmów grupy G .

- (a) Pokaż, że $Aut(G)$ jest grupą. Pokaż, że odwzorowanie

$$G \ni g \longrightarrow (g' \mapsto g \cdot g' \cdot g^{-1}) \in Aut(G)$$

jest homomorfizmem; nazywamy je odwzorowaniem dołączonym lub dołączonym działaniem G na sobie.

- (b) Pokaż, że jądro odwzorowania dołączonego składa się z elementów przemiannych ze wszystkimi innymi, nazywamy je centrum grupy:

$$Z(G) = \{g \in G : \forall g' \in G \mid g \cdot g' = g' \cdot g\}$$

5. Znajdź centrum następujących grup (w zależności od n):

- (a) Grupy permutacji Σ_n
- (b) Grupy kwaternionów $\mathbb{H}_8$
- (c) Grupy dihedralnej $\mathbb{D}_{2n}$
- (d) Grupy izometrii sześciangu, zob <http://sage2.mimuw.edu.pl/home/pub/105/>

6. Załóżmy, że grupa G działa na zbiorze X tranzytywnie. Pokaż, że dla każdej pary $x_1, x_2 \in X$ grupy izotropii G_{x_1} i G_{x_2} są sprzężone, tzn. istnieje $g \in G$ takie, że $G_{x_1} = gG_{x_2}g^{-1}$. Wywnioskuj z tego, że o ile grupa G jest skończona to moc zbioru X jest równa indeksowi podgrupy izotropii G_x w G .