

1. Znajdź rozkład na elementy nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ następujących wielomianów:

(a) $63x^3 + 21x^2 + 84$

(c) $70x^4 + 315x^3 + 105$

(b) $90x^3 + 135x + 315$

(d) $54x^4 - 108x^3 + 27$

2. Korzystając z kryterium Eisensteina sprawdź nierozkładalność następujących wielomianów; czasami trzeba zastosować podstawienie $x \mapsto x + a$.

(a) $x^5 + 30x^4 + 27x + 102$ w $\mathbb{Q}[x]$

(e) $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ w $\mathbb{Q}[x]$,
gdzie p liczba pierwsza

(b) $7x^4 + 21x^3 + 18x + 21$ w $\mathbb{Z}[x]$

(c) $x^4 + 2x + 3$ w $\mathbb{Q}[x]$

(f) $x^2 + y^2 + z^2$ w $k[x, y, z]$, gdzie
 $\text{char } k \neq 2$

(d) $x^4 + 2x^3 + 3$ w $\mathbb{Q}[x]$

3. Dla odpowiedniego p znajdź wielomian $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ taki, że iloraz $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$ jest ciałem mocy

(a) 25

(b) 27

(c) 32

4. Dla każdej liczby pierwszej p rozpatrzmy $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} : p \nmid b\} \subset \mathbb{Q}$. Dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ weźmy

$$R_n = \{a/b \in \mathbb{Q} : \text{NWD}(b, n) = 1\} \subset \mathbb{Q}$$

gdzie ułamek a/b jest w postaci nieskracalnej.

- (a) Pokaż, że oba te podzbiory tworzą podpierścień $\mathbb{Q}$.
(b) Ile ideałów maksymalnych ma pierścień $\mathbb{Z}_{(p)}$?
(c) Ile ideałów pierwszych ma pierścień $\mathbb{Z}_{(p)}$?
(d) Pokaż, że $\bigcap_p \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}$, gdzie przecięcie jest wzięte po wszystkich liczbach pierwszych.
(e) Pokaż, że

$$R_n = \bigcap_{p|n} \mathbb{Z}_{(p)}$$

- (f) Ile ideałów maksymalnych ma pierścień R_n ?