

1. Pokaż, że następujące wielomiany są nierozkładalne

- (a) $x^2 + x + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$
- (b) $x^2 + 1$ w $\mathbb{Z}_3[x]$
- (c) $x^3 + x^2 + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$
- (d) $x^3 - x + 1$ w $\mathbb{Z}_3[x]$

2. Niech $f \in k[x]$ będzie wielomianem stopnia d o współczynnikach w ciele k . Pokaż, że pierścień ilorazowy $k[x]/(f)$ jest przestrzenią liniową nad k wymiaru d z bazą $\underline{1}, \underline{x}, \dots, \underline{x}^{d-1}$, gdzie $\underline{x}^i$ oznacza tutaj klasę jednomianu x^i w ilorazie $k[x]/(f)$.

- (a) Uzupełnij poniższą tabliczkę mnożenia dla $f = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ i dla $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

	$\underline{x}$	$\underline{x} + \underline{1}$
$\underline{x}$		
$\underline{x} + \underline{1}$		

- (b) Pokaż, że pierścienie $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ i $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$ są izomorficzne.
 - (c) Pokaż, że pierścień $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ jest ciałem o czterech elementach.
3. Załóżmy, że wielomian f jest nierozkładalny w pierścieniu $k[x]$. Pokaż, że pierścień ilorazowy $k[x]/(f)$ jest ciałem.
4. Korzystając z poprzednich zadań
- (a) znajdź ciało o 8 elementach,
 - (b) znajdź ciało o 9 elementach,
 - (c) znajdź ciało o 27 elementach.
5. Rozpatrzmy pierścień wielomianów $k[x]$ o współczynnikach w ciele k ; niech a będzie ustalonym elementem ciała k .
- (a) Pokaż, że odwzorowanie $\epsilon_a : k[x] \rightarrow k$, które wielomianowi f przyporządkowuje jego wartość w a , czyli $\epsilon_a(f) = f(a)$, jest homomorfizmem.

- (b) Pokaż, że $\ker \epsilon_a = (x - a)$ i wywnioskuj z tego, że $k[x]/(x - a) \simeq k$.
6. Tym razem ustalmy dwa elementy $a, b \in k$, $a \neq b$ oraz rozpatrzmy odwzorowanie w produkt pierścieni

$$\epsilon_{a,b} : k[x] \rightarrow k \times k$$

takie, że $\epsilon_{a,b}(f) = (f(a), f(b)) \in k \times k$. Tak jak w poprzednim zadaniu pokaż, że $\epsilon_{a,b}$ jest homomorfizmem i wyznacza izomorfizm ilorazu $k[x]/((x - a)(x - b))$ z produktem $k \times k$.

7. Uogólnij poprzednie zadanie na następującą sytuację: Załóżmy, że wielomiany f_1 i f_2 są względnie pierwsze w pierścieniu $k[x]$. Wówczas mamy izomorfizm

$$k[x]/(f_1 \cdot f_2) \simeq k[x]/(f_1) \times k[x]/(f_2)$$

Wskazówka: Zwróć uwagę na to, że sytuacja jest podobna jak w izomorfizmie $\mathbb{Z}_{ab} \simeq \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ dla liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ względnie pierwszych i dowód też będzie podobny; wykorzystaj fakt $(f_1) \cap (f_2) = (f_1 \cdot f_2)$ i porównaj wymiary k -przestrzeni liniowych po obu stronach powyższej formuły.

8. Niech $h \in \mathbb{R}[x]$ będzie nierozkładalnym wielomianem stopnia 2 i $z \in \mathbb{C}$ jednym z jego dwóch sprzężonych pierwiastków zespolonych.

- (a) Pokaż, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}[x] \ni f \longrightarrow f(z) \in \mathbb{C}$$

jest homomorfizmem.

- (b) Pokaż, że jądro powyższego odwzorowania jest ideałem generowanym przez wielomian h i wywnioskuj z tego, że $\mathbb{R}[x]/(h) \simeq \mathbb{C}$.
9. Rozpatrzmy pierścień ilorazowy $k[x]/(x^n)$, gdzie $n > 1$. Niech $\underline{f}$ oznacza klasę wielomianu $f \in k[x]$ w pierścieniu ilorazowym $k[x]/(x^n)$.
- (a) Pokaż, że $k[x]/(x^n)$ jest przestrzenią liniową wymiaru n nad k .
- (b) Pokaż, że $\underline{f}$ jest elementem odwracalnym w $k[x]/(x^n)$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(0) \neq 0$.
- (c) Pokaż, że wszystkie ideały w $k[x]/(x^n)$ są postaci $\underline{x}^m$ i mamy ciąg inkluzji:

$$k[x]/(x^n) \supset (\underline{x}) \supset (\underline{x}^2) \supset \cdots \supset (\underline{x}^{n-1}) \supset (\underline{x}^n) = (0)$$