

1. Znajdź największy wspólny dzielnik dla:

- (a) $11 + 27i$ oraz $9 + 32i$ w $\mathbb{Z}[i]$,
- (b) $11 + 27i$ oraz $33 - 4i$ w $\mathbb{Z}[i]$,
- (c) $x^7 - 1$ oraz $x^{16} - 5x^9 - x^7 + 5$ w $\mathbb{Q}[x]$,
- (d) $x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ i $x^3 + x^2 + x + 1$ w $\mathbb{C}[x]$,
- (e) $x^7 + x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8x - 8$ i $x^3 + x^2 - x - 1$ w $\mathbb{R}[x]$.

2. Znajdź generatory następujących ideałów:

- (a) $(11 + 27i) \cap (33 - 4i)$ w $\mathbb{Z}[i]$,
- (b) $(x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + \dots) \cap (x^9 - x^{10} + x^{11} - x^{12} + \dots)$ w $\mathbb{Q}[[x]]$,
- (c) $(x) \cap (x^2, y)$ w $\mathbb{C}[x, y]$,
- (d) $(2) \cap (1 + \sqrt{5})$ w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$,
- (e) $(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cap (x^3 + x^2 + x + 1)$ w $\mathbb{C}[x]$.

3. Znajdź minimalny zbiór generatorów dla sumy ideałów (o ile ideał jest główny to podaj jeden generator):

- (a) $(11 + 27i) + (9 + 32i)$ w $\mathbb{Z}[i]$,
- (b) $(x^7 - 1) + (x^{16} - 5x^9 - x^7 + 5)$ w $\mathbb{Q}[x]$,
- (c) $(2) + (1 + \sqrt{5})$ w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$,
- (d) $(4) + (18)$ w $\mathbb{Z}_{36}$,
- (e) $(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + (x^3 + x^2 + x + 1)$ w $\mathbb{C}[x]$.

4. Rozpatrzmy homomorfizm pierścieni $\varphi : A \rightarrow B$.

- (a) Pokaż, że przeciwobraz ideału jest ideałem, tzn. $J \triangleleft B \Rightarrow \varphi^{-1}(J) \triangleleft A$.
- (b) Pokaż, że obraz ideału może nie być ideałem.
- (c) Pokaż, że przeciwobraz ideału maksymalnego może nie być ideałem maksymalnym.

5. Opisz ideały maksymalne w następujących pierścieniach, podaj ich generatory:
- (a) pierścień szeregów formalnych $k[[x]]$ nad dowolnym ciałem k ,
 - (b) pierścień $\mathbb{Q}_{(p)}$ liczb wymiernych o mianownikach niepodzielnych przez liczbę pierwszą p ,
 - (c) pierścień wielomianów zespolonych $\mathbb{C}[x]$,
 - (d) pierścień wielomianów rzeczywistych $\mathbb{R}[x]$,
 - (e) $\mathbb{Z}_n$ pierścień reszt modulo n , gdzie n ma następujący rozkład na produkt potęg różnych liczb pierwszych $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, $a_i \geq 1$.
6. Wykaż, że każda liczba całkowita dodatnia ma następujący rozkład w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$:

$$n = p_1^{a_1} p_a^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot z_1^{b_1} \bar{z}_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s} \bar{z}_s^{b_s}$$

gdzie p_i są różnymi liczbami pierwszymi, które nie są sumami kwadratów liczb całkowitych, z_j są różnymi nierzeczywistymi elementami pierwszymi w $\mathbb{Z}[i]$, a wykładniki a_i i b_j są dodatnie.

7. Niech $I \triangleleft A$ będzie ideałem właściwym (tzn. $I \neq A$).
- (a) Pokaż, że jeśli A jest dziedziną ideałów głównych, to I jest zawarty w skończonej liczbie ideałów maksymalnych w A .
 - (b) Pokaż, że ideał $(y) \triangleleft \mathbb{Q}[x, y]$ jest zawarty w nieskończonej liczbie ideałów maksymalnych w $\mathbb{Q}[x, y]$.