

Proszę zapoznać się z notatkami, które są do pobrania pod następującym adresem <http://dydmat.mimuw.edu.pl/algebra-i> Proszę przeczytać i zrozumieć podstawowe definicje dotyczące grup.

W kolejnych przykładach będziemy stopniowo upraszczać notację: ostatecznie struktury algebraiczne, czyli zbiór $+$ działania, będą oznaczane przez podanie zbioru, przy czym założeniu, że struktura działań jest znana.

1. Grupę $(G, e, ^{-1}, \cdot)$ nazywamy cykliczną jeśli istnieje $g \in G$ (zwane jej generatorem) takie, że każdy element w G jest postaci $g_1 \cdot g_2 \cdots g_r$ dla pewnego r , gdzie każde g_i jest równe g albo g^{-1} .
 - (a) Pokaż, że każda grupa cykliczna jest przemienna (abelowa).
 - (b) Pokaż, że każda grupa cykliczna jest izomorficzna albo z $(\mathbb{Z}, 0, -, +)$ albo z grupą addytywną $(\mathbb{Z}_n, 0_n, -_n, +_n)$ reszt z dzielenia przez n .
2. Pokaż, że grupa $\mathbb{Z}_n$ reszt z dzielenia przez n jest izomorficzna z podgrupą grupy moltiplikatywnej liczb zespolonych $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, ^{-1}, \cdot)$ generowaną przez pierwiastek pierwotny stopnia n z jednościami równy $\cos(2\pi/n) + i \cdot \sin(2\pi/n)$.
3. Grupa dihedralna $\mathbb{D}_{2n}$ to z definicji grupa symetrii n -kąta foremnego (na płaszczyźnie).
 - (a) Pokaż, że grupa $\mathbb{D}_{2n}$ jest izomorficzna z podgrupą odwracalnych macierzy rzeczywistych $GL(2, \mathbb{R})$ generowaną przez
$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 - (b) Pokaż, że $\mathbb{D}_{2n}$ ma $2n$ elementów i zawiera $\mathbb{Z}_n$ jako podgrupę. Ile w $\mathbb{D}_{2n}$ jest elementów rzędu 2 czyli takich g , że $g^2 = \text{id}$?
4. Grupa symetryczna (permutacji zbioru n elementów) $\mathbb{S}_n$. Permutację $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ będziemy oznaczać ciągiem liczb $(\pi(1), \dots, \pi(n))$.
 - (a) Pokaż, że grupa $\mathbb{S}_3$ jest izomorficzna z $\mathbb{D}_6$.

- (b) Znajdź dwa elementy, które generują grupę $\mathbb{S}_3$ i dwa elementy, które generują grupę $\mathbb{S}_4$.
5. Grupa kwaternionów $\mathbb{H}_8$. Grupa $\mathbb{H}_8$ składa się z ośmiu elementów $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$, gdzie 1 jest elementem neutralnym, $(-1)^2 = 1$, $(-1) \cdot i = i \cdot (-1) = -i$ i to samo dla j i k oraz $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.
- (a) Wypisz tabelkę działań dla grupy $\mathbb{H}_8$.
- (b) Pokaż, że grupa $\mathbb{H}_8$ jest izomorficzna z podgrupą $GL(4, \mathbb{R})$ generowaną przez następujące macierze:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Pokaż, że $\mathbb{H}_8$ jest izomorficzne podgrupą $GL(2, \mathbb{C})$ generowaną przez następujące macierze

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie, jak zwykle, $i = \sqrt{-1}$.

- (d) Przedstaw grupę $\mathbb{H}_8$ jako grupę permutacji, sprawdź jak to zrobić w SAGE <http://sage2.mimuw.edu.pl/home/pub/104/>
6. Niech G będzie grupą z elementem neutralnym e . Rzędem elementu $g \in G$ nazywamy najmniejsze $r \geq 1$ takie, że $g^r = e$ (o ile takiego r nie ma, to mówimy, że rząd g jest nieskończony).
- (a) Pokaż, że w grupie cyklicznej rzędu p^m , gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $m > 1$, jest dokładnie $p^m - p^{m-1}$ elementów rzędu p^m
- (b) Pokaż, że dla $n > 2$ w $\mathbb{S}_n$ nie ma elementów rzędu większego niż $n!$. Niech p będzie liczbą pierwszą większą niż n . Czy $\mathbb{S}_n$ może mieć elementy rzędu p ?
7. Opisz wszystkie grupy rzędu ≤ 7 .