Zadania z Analizy I*

Jarosław Buczyński

22 stycznia 2016

Zadania wybrane na ćwiczenia z Analizy I w grupie JSIM 2015/2016. Zadania (czasem z małą modyfikacją) pochodzą między innymi z następujących publikacji:

- zbiór zadań Kaczor-Nowak,
- zbiór zadań Biler-Witkowski.

Zadanie 1. $S \subset \mathbb{Z}$ jest podzbiorem o dopełnieniu skończonym. Pokaż, że istnieją dwa nieskończone zbiory $X, Y \subset \mathbb{Z}$, takie że

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} = S$$

oraz każdy element $s \in S$ przedstawia się na dokładnie jeden sposób w postaci $x + y$, gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$.

Zadanie 2. $P(t)$ jest wielomianem, który dla argumentów wymiernych przyjmuje wartości wymierne, a dla argumentów niewymiernych przyjmuje wartości niewymierne. Pokaż, że $P(t) = at + b$ dla stałych $a, b \in \mathbb{Q}$.

Zadanie 3. $P(t)$ jest wielomianem, który dla argumentów rzeczywistych przyjmuje wartości rzeczywiste, a dla argumentów nierzeczywistych przyjmuje wartości nierzeczywiste. Pokaż, że $P(t) = at + b$ dla stałych $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$.

Definiujemy $e^z := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$.

Zadanie 5. Udowodnij, że $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Zadanie 6. Policz $e^{\pi i}$.

Zadanie 7. Pokaż, że odwzorowanie $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ jest inwersją płaszczyzny zespolonej względem okręgu o promieniu 1 i środku w $0 \in \mathbb{C}$.

Zadanie 8. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)$$

Zadanie 9. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Zadanie 10. Załóżmy $0<b_1<a_1$, oraz

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

Wykazać, że oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy.

Zadanie 11. Policz

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$$

Zadanie 12. Pokaż, że granice następujących szeregów istnieją oraz, że $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$:

$$a=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\qquad\text{(znaki na przemian, ułamki po kolei)}$$

$$b=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots\qquad\text{(dwie odwrotności nieparzystych, minus jedna odwrotność parzystej)}$$

Zadanie 13. Wykazać, że istnieją homografie $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$, które przenoszą ustalone trzy punkty na dowolne inne trzy punkty, np. $0,1,i$. Pokazać, że odwzorowanie odwrotne do homografii jest homografią.

(Też: złożenie homografii jest homografią.)

Zadanie 14. Pokaż, że dla $x\in\mathbb{R}$:

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+$$

Znajdź podobny wzór na $\log(1+x)$ dla $|x|<1$, tzn, ciąg liczb rzeczywistych a_n taki, że

$$\log(1+x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

Zadanie 15. Dla jakich wartości liczby rzeczywistej $\alpha > 0$ szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest zbieżny?

Zadanie 16. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

jest liczbą niewymierną.

Zadanie 17. Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Zadanie 18. Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_p$ będą dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)} - n \right).$$

Zadanie 19. Udowodnij, że $e^{z_1 z_2} = (e^{z_1})^{z_2}$, dla wszystkich możliwych wartości $(e^{z_1})^{z_2}$.

Zadanie 20. Znajdź ciąg liczb rzeczywistych a_n taki, że dla $|x| < 1$

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Zadanie 21. Niech S^2 będzie sferą Riemanna, czyli $S^2 = U_0 \cup U_\infty$, gdzie $U_0 \simeq \mathbb{C}$, $U_\infty \simeq \mathbb{C}$ oraz $U_0 \cap U_\infty \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $z \in U_0 \setminus \{0\}$ odpowiada $\frac{1}{z} \in U_\infty \setminus \{0\}$. Punkty ze zbioru U_0 odpowiadające liczbie $z \in \mathbb{C}$ oznaczamy po prostu przez z. Punkty ze zbioru U_∞ odpowiadające liczbie $w \in \mathbb{C}$ oznaczamy $\frac{1}{w}$, jeśli $w \neq 0$ oraz ∞, jeśli $w = 0$.

(i) Pokazać, że funkcja wymierna $z \mapsto f(z) = \frac{a_n z^n + \cdots + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_0}$ definiuje odwzorowanie ciągłe $S^2 \to S^2$. Co to jest $f(\infty)$, $f^{-1}(\infty)$?

(ii) Dla jakich n, m, a_i, b_j funkcja wymierna f jest odwracalna?

(iii) Pokazać, że nie można rozszerzyć odwzorowania $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$ do ciągłego odwzorowania $S^2 \to S^2$.

Zadanie 22. Policzyć wszystkie wartości i^i, gdzie $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, natomiast dla $x, y \in \mathbb{C}$, definiujemy $x^y = e^{y \log x} = \{e^{yz} \in \mathbb{C} \mid e^z = x\}$.

Zadanie 23.
(i) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(x+y) = f(x)f(y)$. Pokazać, że istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = a^x$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. (Wystarczy zakładać, że f jest ciągła w 0.)

(ii) Niech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(z+w) = f(z)f(w)$. Czy $f(z) = e^z$?

(iii) Jeśli w poprzednim punkcie odpowiedź jest twierdząca, to przedyskutuj, które założenia są nie potrzebne, a które można osłabić. Jeśli w poprzednim punkcie odpowiedź jest negatywna, to przedyskutuj, przy jakich dodatkowych założeniach można pokazać, że $f(z) = e^z$.

Zadanie 24. Udowodnij, że dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$ równanie

$$e^z = \frac{a+z}{a-z}$$

Nie ma rozwiązań w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Zadanie 25. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}.$$

Zadanie 26. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \dots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \dots, n\}$, taki, że

$$\left| \sum_{k \in B} z_k \right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Zadanie 27. Udowodnij, że istnieje kwadrat, w którym można umieścić ciąg parami rozłącznych kwadratów o bokach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Zadanie 28. Obliczyć granicę:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}}$$

Zadanie 29. Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Zadanie 30. Wyznaczyć granice (o ile istnieją) ciągów zadanych wzorami:

$$b_{n+1} = \int_0^1 \min(x, a_n)\mathrm{d}x,$$
$$a_{n+1} = \int_0^1 \max(x, b_n)\mathrm{d}x$$

w zależności od $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 31. Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$.

Zadanie 32. Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Zadanie 33. Dla jakich wartości a_1 ciąg określony rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

jest zbieżny?

Zadanie 34. Czy z warunku $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ wynika, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne, bądź rozbieżne?

Zadanie 35. Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$, wartości a_1 obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - ze^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 36. Obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}(\sqrt{n+1}\sin^n x\cdot\cos x)\right)$$

Zadanie 37. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}=\frac{1}{2}.$$

Zadanie 38. Ciąg a_n określamy wzorem:

$$a_1=x,\qquad a_{n+1}=\log\frac{e^{a_n}-1}{a_n}.$$

Pokazać, że

$$1+a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots=e^x.$$

Zadanie 39. Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\Sigma=\left\{a=\{a_n\}\mid \text{szereg}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ jest zbieżny}\right\}.$$

Skonstruuj ciąg $b\notin\Sigma$ taki, że

$$\inf_{a\in\Sigma}\sup_n\left|1-\frac{a_n}{b_n}\right|=0$$

oraz ciąg $a\in\Sigma$ taki, że

$$\inf_{b\notin\Sigma}\sup_n\left|1-\frac{a_n}{b_n}\right|=0$$

Zadanie 40. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

Zadanie 41. Ciąg u_n liczb dodatnich jest ściśle rosnący, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ jest zbieżny. Oznaczmy przez $f(x)$ liczbę par liczb naturalnych (i,j), dla których $\sum_{n=i}^{j}u_n\le x$. Udowodnij, że $\lim_{x\to\infty}f(x)/x=0$.

Zadanie 42. Znajdź ciąg liczb naturalnych n_k taki, że

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}<\infty,\qquad\text{ale}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_{n_k}}=\infty.$$

Zadanie 43. Załóżmy, że $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ oraz $n > 1$. Wykaż, że

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cdots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$$

Zadanie 44. Obliczyć wartość iloczynu

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right).$$

Zadanie 45. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}} = 3$$

Zadanie 46. a_n jest ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1)$. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 + a_2(1 - a_1) + a_3(1 - a_1)(1 - a_2) + \cdots = 1.$$

Zadanie 47. Niech A będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych, które w swoim zapisie dziesiętnym nie mają cyfry 0. Wyznacz wszystkie α, dla których szereg $\sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

Zadanie 48. Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$.

Zadanie 49. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ określmy funkcję $\phi_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ wzorem $\phi_\alpha(z) = (e^z, e^{\alpha z})$. Opisz domknięcie obrazu ϕ_α w zależności od parametru α:

- dla $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$,
- dla $\alpha \in \pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,
- dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Zadanie 50. Definiujemy $f_n \colon [0,1] \to [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ jako n-te przybliżenie *krzywej Peano*: czyli w każdym kroku, każdy kwadrat dzielimy na dziewięć mniejszych kwadratów i zastępujemy przekątną przez łamaną biegnącą, która jest sumą przekątnych tych kwadratów (według rysunku na tablicy na ćwiczeniach). Pokazać, że:

(i) dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0,1]^2$,

(ii) funkcja $f \colon [0,1] \to [0,1]^2$ określona wzorem $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (jest to *granica punktowa* ciągu funkcji f_n) jest ciągła (*uwaga na boku: granica punktowa ciągu funkcji ciągłych* ***nie*** *musi być ciągła!*),

(iii) funkcja $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ jest "na".

Zadanie 51 (nierówność Schwarza)**.** Pokaż, że:

(i) Dla dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych) x_i, y_i zachodzi:

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n|^2 \leq (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)(|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2).$$

(ii) Dla dowolnych ciągów liczb (rzeczywistych lub zespolonych) $(x_i), (y_i)$, takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$ zachodzi:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right).$$

(iii) Dla dowolnych funkcji $f, g\colon : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, takich, że całki $\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ oraz $\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x$ istnieją i są skończone mamy:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x \right).$$

Zadanie 52 (nierówność Höldera)**.** Załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pokaż, że:

(i) Dla dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych) x_i, y_i zachodzi:

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(ii) Dla dowolnych ciągów liczb (rzeczywistych lub zespolonych) $(x_i), (y_i)$, takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q < \infty$ zachodzi:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(iii) Dla dowolnych funkcji $f, g\colon : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, takich, że całki $\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x$ oraz $\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x$ istnieją i są skończone mamy:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Zadanie 53 (jednostajna granica ciągu funkcji ciągłych jest ciągła)**.** Niech A i B będą podzbiorami $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ (*ogólniej, za A i/lub B można wziąć dowolny podzbiór $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ lub inną przestrzeń, w której sensowne jest określenie odległości między dwoma punktami*). Mówimy, że ciąg funkcji $f_n \colon A \to B$ jest *jednostajnie zbieżny* do funkcji $f \colon A \to B$, jeśli

$$\forall_\epsilon \exists_N \forall_{n \geq N} \forall_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

W takiej sytuacji oznaczamy $f_n \rightrightarrows f$. Pokaż, że jeśli $f_n \rightrightarrows f$ i funkcje f_n są ciągłe, to f jest ciągła.

Zadanie 54 (lokalnie jednostajna zbieżność)**.** Niech A i B będą podzbiorami $\mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg funkcji $f_n \colon A \to B$ jest *lokalnie jednostajnie zbieżny* do funkcji $f \colon A \to B$, jeśli każdy punkt $x \in A$ ma otoczenie otwarte $U_x = (x - \delta, x + \delta) \cap A$ (dla pewnego $\delta > 0$), takie, że $f_n|_{U_x} \rightrightarrows f_{U_x}$.

(i) (zadanie wyłącznie domowe) Kontempluj przez co najmniej 10 minut definicje lokalnie jednostajnej zbieżności i jednostajnej zbieżności. W szczególności:

- Zrozum, że jednostajna zbieżność implikuje lokalnie jednostajną zbieżność.
- Zrozum, że A, B w definicji jednostajnej zbieżności może byc dowolnym zbiorem, na którym mamy sensowne pojęcie odległości dwóch punktów (tzw przestrzenią metryczną). Jeśli nie chcesz wnikać w przestrzenie metryczne, to rozważaj wyłącznie podzbiory $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (niżej też).
- Zrozum, że B w definicji lokalnie jednostajnej zbieżności może byc dowolną przestrzenią metryczną.
- Zmodyfikuj definicję lokalnie jednostajnej zbieżności, aby A mogło być dowolną przestrzenią metryczną.

(ii) Pokaż, że granica lokalnie jednostajna funkcji ciągłych jest ciągła.

(iii) Udowodnij, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem domkniętym, ograniczonym (*ogólniej: zwartym*), to lokalnie jednostajna zbieżność implikuje jednostajną zbieżność.

(iv) Podaj przykład ciągu funkcji ciągłych, który jest lokalnie jednostajnie zbieżny, ale nie jest jednostajnie zbieżny.

Zadanie 55 (o wielomianach symetrycznych)**. Wstęp.** Niech $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ oznacza zbiór wielomianów wielu zmiennych $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Czyli $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ to (nieskończenie wymiarowa) przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ składająca się z elementów:

$$f = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{x}^{D_j},$$

gdzie $a_j \in \mathbb{K}$, $D_j = (d_{j1}, \dots, d_{jn}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ oraz $\mathbf{x}^{D_j} = x_1^{d_{j1}} \cdot x_2^{d_{j2}} \cdots x_n^{d_{jn}}$. Stopień wielomianu f jak wyżej to $\deg f := \max\{\sum D_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$. Wielomiany można mnożyć i składać, np., jeśli $f, g_1, \dots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, to $f(g_1, \dots, g_n)$ też jest elementem $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. *Permutacja* zbioru $\{1, \dots, n\}$ to bijekcja $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Wielomian $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ jest *symetryczny*, jeśli dla dowolnej permutacji σ mamy

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Polecenie 1. Pokaż, że jeśli $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ jest wielomianem symetrycznym, to istnieje dokładnie jeden wielomian $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, taki, że

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(S_1, S_2, \dots, S_n),$$

gdzie S_k jest k-tym elementarnym wielomianem symetrycznym:

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\}, \\ \#I = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Polecenie 2. Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Znajdź odwzorowanie ciągłe "na" $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, takie, że dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mamy:

$$\phi^{-1}(\mathbf{y}) = \left\{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \text{ jest permutacją } \{1, \dots, n\}\right\},$$

gdzie $\mathbf{y} := \phi(\mathbf{x})$.

Zadanie 56 (zaproponowane przez pana Wojciecha Zwolińskiego)**.** Znajdź wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, takie, że

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Zadanie 57. Dla $p \in [1, \infty)$ definiujemy *odległość w sensie* ℓ_p dwóch punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ w $\mathbb{R}^n$:

$$\rho_{\ell_p}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jeśli $p = \infty$, to

$$\rho_{\ell_\infty}(x, y) = \max |x_i - y_i|.$$

Pokaż, że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\lim_{p \to \infty} \rho_{\ell_p}(x, y) = \rho_{\ell_\infty}(x, y).$$

Pokaż, że (dla dowolnego $p \in [1, \infty]$) spełniony jest warunek trójkąta:

$$\rho_{\ell_p}(x, y) + \rho_{\ell_p}(y, z) \geq \rho_{\ell_p}(x, z).$$

Zadanie 58. n-wymiarowa *kula otwarta (w sensie ℓ_p)* o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ i o promieniu r, to zbiór

$$B_{\ell_p}(x, r) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \rho_{\ell_p}(x, y) < r \right\}.$$

Narysuj i wyobraź sobie kule dla niektórych wartości p, n, np:

- $n = 1$,
- $n = 2$ oraz: $p = 1$ lub $p \in (1, 2)$, lub $p = 2$, lub $p \in (2, \infty)$, lub $p = \infty$,
- $n = 3$ oraz: $p = 1$ lub $p = 2$ lub $p = \infty$,
- $\ldots$

Zadanie 59. Podzbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest *otwarty* (w sensie ℓ_p), jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $B_{\ell_p}(x, \epsilon) \subset U$. Pokaż, że otwartość nie zależy od wyboru p, czyli dla dowolnych $p, q \in [1, \infty]$ zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty w sensie ℓ_p wtedy i tylko wtedy, gdy jest otwarty w sensie ℓ_q. W tej sytuacji mówimy, że U jest otwarty.

Zadanie 60. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem. Odwzorowanie $\phi \colon A \to \mathbb{R}^m$ jest *ciągłe* (w sensie ℓ_p), jeśli

$$\forall_{x \in A} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in A} \; \rho_{\ell_p}(x, y) \leq \delta \implies \rho_{\ell_p}(\phi(x), \phi(y)) \leq \epsilon.$$

Pokaż, że ϕ jest ciągłe, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego $U \subset \mathbb{R}^m$ przeciwobraz $\phi^{-1}(U) = V \cap A$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty. (Mówimy, że przeciwobraz jest otwarty w A.) W szczególności, ciągłość nie zależy od wyboru p.

Zadanie 61. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *domknięty*, jeśli jego dopełnienie $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest otwarte, czyli dla każdego $x \in A$ oraz $\epsilon \geq 0$ mamy $B_{\ell_p}(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ (p możemy wybrać dowolne).

Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *ograniczony*, jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, takie, że $A \subset [-M, M]^n$, czyli moduł każdej współrzędnej dowolnego punktu A jest ograniczony przez wspólną stałą M.

Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$ (wariant "minimum" zadania : $n = 1$). Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) A jest domknięty i ograniczony.

(ii) Dla dowolnego ciągu x_k punktów z A, istnieje podciąg wybranych elementów x_{n_k} (gdzie $\lim_{k \to \infty} n_k = \infty$) zbieżny do pewnego $x \in A$. (O przestrzeni spełniającej ten warunek mówimy, że jest *ciągowo zwarta*.)

(iii) Jeśli I jest pewnym (być może nieskończonym) zbiorem indeksów, oraz dla każdego $i \in I$ mamy otwarty $U_i \subset \mathbb{R}^n$, takie że

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

to istnieje skończenie wiele $i_1, \ldots, i_m \in I$, takich, że

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

(Ten warunek w skrócie wyrażamy "z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone". Jest to jeden z dwóch warunków, definiujących bardzo ważne pojęcie *zwartości* przestrzeni topologicznych. Drugi warunek (*warunek Hausdorffa* (T_2)) jest automatycznie spełniony dla podzbiorów $\mathbb{R}^n$).

(Zadanie jest częścią większej teorii topologicznej: Przestrzeń zwarta jest ciągowo zwarta; przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo zwarta; w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ podzbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.)

Zadanie 62. Pokaż, że $U \subset \mathbb{R}$ jest otwarty, wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najwyżej przeliczalną sumą rozłącznych przedziałów i półprostych:

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i),$$

gdzie $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ oraz $\cdots < a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1} < \cdots$ (dopuszczamy $a_0 = -\infty$ oraz $b_N = +\infty$).

Zadanie 63. Dla podzbiorów $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *izometrią* (dla metryk ℓ_p na A i ℓ_q na B), jeśli dla każdych $x, y \in A$ mamy

$$\rho_{\ell_q}(\phi(x), \phi(y)) = \rho_{\ell_p}(x, y).$$

Pokaż, że izometria jest odwzorowaniem ciągłym i różnowartościowym.

Zadanie 64. Odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *homeomorfizmem*, jeśli jest ciągłe, bijekcją, oraz odwzorowanie odwrotne jest ciągłe.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Pokaż, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ jest homeomorfizmem.

Zadanie 65. Jeśli $U \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem otwartym, $x_0 \in U$, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją, to *różniczką* funkcji f w x_0 nazywamy następującą granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Jeśli różniczka w x_0 istnieje, to f jest *różniczkowalna* w x_0.

(i) Pokaż, że jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x, to jest ciągła w punkcie x. Oczywiście, odwrotne stwierdzenie nie zachodzi.

(ii) Pokaż przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w punkcie 0, ale nigdzie indziej.

(iii) Czy istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie?

Oznaczamy $f^{(i+1)} := (f^{(i)})'$ (o ile istnieje). Ewentualnie $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$.

Zadanie 66. Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}$, funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest klasy C^0 (piszemy $f \in C^0(U, \mathbb{R})$, lub $f \in C^0(U)$, lub $f \in C^0$), jeśli f jest ciągła na U.

Dla $i \in \mathbb{N}$, funkcja f jest klasy C^i, jeśli $f' \in C^{i-1}$.

Funkcja f jest klasy C^∞, jeśli $f \in C^i$ dla każdego $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Podaj przykład niezerowej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^∞, dla której znikają wartość oraz wszystkie różniczki w 0:

$$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(i)}(0) = \cdots.$$

Zadanie 67 (27 linii na kubice)**.** Niech S będzie zespoloną powierzchnią stopnia 3 w $\mathbb{C}^3$ (kubiką). To znaczy wybieramy wielomian $F(x, y, z)$ stopnia 3 o współczynnikach zespolonych w trzech zmiennych, następnie definiujemy:

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}.$$

Należy założyć, że "F jest wystarczająco ogólne". Intucyjnie, jeśli np weźmiemy $F = x^3$, lub $F = (ax + by + cz)^2(a'x + b'y + c'z)$, to S jest "mało ciekawe". Formalnie, powiedzenie, że "własność $P(F)$ zachodzi dla wystarczająco ogólnego wielomianu F stopnia ≤ 3" oznacza, że w zbiorze wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3 (jest to po prostu $\mathbb{C}^{20}$), istnieje otwarty gęsty podzbiór U, taki, że $P(F)$ zachodzi dla każdego $F \in U$.

Pokaż, że wystarczająco ogólna kubika zawiera dokładnie 27 prostych zespolonych, czyli obrazów różnowartościowego odwzorowania afinicznego $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Wariant być może ciut prostszy (przynajmiej łatwiej sobie wyobrazić): Weźmy $F = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$, gdzie $w = ax + by + cz + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i (a, b, c, d) są wystarczająco ogólne. Pokaż, że

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

zawiera dokładnie 27 prostych rzeczywistych.

Zasadnicze Twierdzenie Algebry:

Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach w $\mathbb{C}$ ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Dowód zasadniczego Twiedzenia Algebry nie jest banalny. Potrzebne jest użycie aksjomatu ciągłości dla $\mathbb{R}$. W trakcie studiów poznacie co najmniej kilka istotnie różnych dowodów.

Wnioski:

1) Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach w $\mathbb{C}$ ma rozkład na skończony iloczyn czynników liniowych.

2) Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach w $\mathbb{R}$ ma rozkład na skończony iloczyn czynników liniowych i kwadratowych (o współczynnikach w $\mathbb{R}$), gdzie czynniki kwadratowe nie mają pierwiastków rzeczywistych.

(W wolnej chwili można sprawdzić, czy na pewno wiemy jak się dowodzi wnioski.)

Zadanie 68. Zakładając Zasadnicze Twierdzenie Algebry pokaż, że:

(i) dowolna funkcja wymierna $\frac{p(x)}{q(x)}$ o współczynnikach w $\mathbb{C}$ ma rozkład na skończoną sumę:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = w(x) + \frac{a_1}{(b_1 x + c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{a_k}{(b_k x + c_k)^{n_k}},$$

gdzie $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$, a $w(x)$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych.

(ii) dowolna funkcja wymierna $\frac{p(x)}{q(x)}$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$ ma rozkład na skończoną sumę:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = w(x) + \frac{a_1}{(b_1x+c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{a_k}{(b_kx+c_k)^{n_k}} + \frac{d_1x+e_1}{(f_1x^2+g_1x+h_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{d_lx+e_l}{(f_lx^2+g_lx+h_l)^{m_l}}$$

gdzie $a_i, \dots, h_i \in \mathbb{R}$, $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ oraz $f_ix^2+g_ix+h_i$ nie mają pierwiastków w $\mathbb{R}$, a $w(x)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych.

Zadanie 69. Używając rozkładów z Zadania 68 podaj eleganckie warunki przy których jesteśmy w stanie policzyć

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

Sumowanie zaczynamy od dostacznie dużego n_0. Zakładamy, że $\frac{p(x)}{q(x)}$ jest funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$.

Zadanie 70 (Całkowanie funkcji wymiernych)**.** *Funkcja pierwotna* funkcji $f(x)$, to taka funkcja $F(x)$, że $F' = f$.

(i) Znajdź funkcję pierwotną $\frac{a}{bx+c}$, dla $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(ii) Znajdź funkcję pierwotną $\frac{dx+e}{fx^2+gx+h}$ dla $d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$, takich, że $fx^2 + gx + h$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

(iii) Używając rozkładów z Zadania 68 znajdź funkcję pierwotną dowolnej funkcji wymiernej o współczynnikach rzeczywistych.

Zadanie 71. Definiujemy przestrzeń l_p jako zbiór tych ciągów (a_n), takich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty,$$

oraz l_∞ jako przestrzeń wszystkich ciągów ograniczonych. Pokaż, że dla $p, p' \in [1, \infty]$ mamy $l_p \subset l_{p'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \leq p'$.

Zadanie 72. Załóżmy, że mamy ciągi $A = (a_n), B = (b_n)$ należą do l_p. Czy

$$\lim_{q\to\infty} \rho_{l_q}(A, B) = \rho_{l_\infty}(A, B)?$$

Zadanie 73 (Zbiory otwarte w l_p)**.** Ustalmy $p, p' \in [1, \infty]$ takie, że $p \leq p'$.

(i) Załóżmy, że $U \subset l_p$ jest zbiorem otwartym. Czy istnieje otwarty podzbiór $U' \subset l_{p'}$, taki, że $U = U' \cap l_p$.

(ii) Załóżmy, że $U' \subset l_{p'}$ jest zbiorem otwartym. Czy $U = U' \cap l_p$ jest otwarty w l_p?

Zadanie 74. Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Udowodnić, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ ma punkt stały (to znaczy taki, że $\phi(x) = x$), lub podać przykład izometrii, która takiego punktu nie ma.

Zadanie 75. Rozstrzygnij, czy następujące szeregi są zbieżne:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16+(-2)^n}{n2^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-n}\log n}{n}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

Zadanie 76. Rozstrzygnij, dla jakich $q \in (0, \infty)$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n)^q}$$

jest zbieżny.

Zadanie 77. Oznaczmy przez P_k zbiór $\{0, k, 2k, \dots\}$. Oblicz

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{n \in P_k} \frac{x^n}{n!}.$$

Zadanie 78. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{10},$$

gdzie $\{x_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ jest zbiorem dodatnich rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = x$.

Zadanie 79. Podać przykład szeregu o wyrazach dodatnich, który jest zbieżny, ale nie spełnia warunku $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Zadanie 80. Niech a_n będzie takim malejącym ciągiem o wyrazach nieujemnych, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest rozbieżny. Niech ponadto

$$b_n = \min\left\{a_n, \frac{1}{\ln n}\right\}, n > 1.$$

Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ też jest rozbieżny.

Zadanie 81. Zbadaj zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregów:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e - (1 + \frac{1}{n})^n)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e - (1 + \frac{1}{n})^{n+1})$

Zadanie 82. Niech a_n będzie rosnącym ciągiem o wyrazach dodatnich. Udowodnij, że dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}}$$

jest zbieżny.

Zadanie 83. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \cos a_n, \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 84 (nierówność Carlemana)**.** Jeśli a_n jest ciągiem liczb dodatnich, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Zadanie 85. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ w zależności od parametrów $a, b > 0$.

Zadanie 86. Załóżmy, że f jest taką dodatnią funkcją malejącą do zera w przedziale $(0, +\infty)$, że $nf(n)$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do $+\infty$. Niech S będzie sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} f(n)$. Znajdź takie przestawienie wyrazów tego szeregu, aby jego suma była równa $S + l$, gdzie l jest dowolnie zadaną liczbą rzeczywistą.

Dla przykładu, znajdź takie przestawienie wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, tak aby suma powiększyła sie o 1.

Zadanie 87. Niech p_n będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych większych niż 1. Udowodnij wzór Eulera:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \text{ dla } x>1.$$

Zadanie 88. Zbadać liczbę pierwiastków równania $a^x = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$.

Zadanie 89. Rozwiązać równanie $(\sin x)^{\frac{1}{2}} + (\cos x)^{\frac{1}{2}} = t$.

Zadanie 90. Załóżmy, że ciąg a_n jest zbieżny do zera. Pokaż, że szeregi

$$\sum a_n, \quad \sum (a_n + a_{n+1})$$

są jednocześnie zbieżne bądź jednocześnie rozbieżne.

Zadanie 91. Wykaż, że szereg $\sum \frac{\cos n \sin(na)}{n}$ jest zbieżny dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 92. Udowodnij, że wielomiany P_n zdefinionwane rekurencyjnie wzorami $P_0 = 1$, $P_1 = x + 1$, $P_{n+1} = P_n + xP_{n-1}$ (dla $n \geq 1$) mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 93. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ i spełnia warunek $f(0) = f(n)$. Pokaż, że równanie $f(x) = f(y)$ ma co najmniej n różnych rozwiązań takich, że $x - y$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 94. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $a \in \mathbb{R}$ warunek $\lim_{n\to\infty} f(\frac{a}{n}) = 0$. Czy istnieje $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Zadanie 95. Pokaż, że jeśli homeomorfizm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f^n(x) = x$, to $f^2(x) = x$.

Zadanie 96. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mające własność Darboux takie, że dla pewnego $m \geq 1$ mamy $f^m(x) = -x$, dla wszystkich x.

Zadanie 97. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest malejąca i ciągła. Udowodnij, że:

(i) istnieje jedyny punkt stały f,

(ii) zbiór $\{x\colon f^2(x) = x\}$ jest nieskończony, lub ma nieparzystą ilość elementów.

Dla ustalonego $n > 2$ zbadać strukturę zbioru $\{x\colon f^n(x) = x\}$.

Zadanie 98. Funkcja $f\colon K \to K$ jest ciągłym odwzorowaniem zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}$ w siebie. Punkt $x_0 \in K$ ma następującą własność: każdy punkt skupienia ciągu iteracji $f^n(x_0)$ jest punktem stałym f. Pokaż, że ciąg $f^n(x_0)$ jest zbieżny.

Podaj przykład, że dla zwartych podzbiorów płaszczyzny powyższy fakt nie jest prawdziwy.

Zadanie 99. Dla ograniczonej funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiujemy funkcję:

$$Sf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sup \{|f(y) - f(z)| \mid |x - z| < \epsilon, |x - y| < \epsilon\}\right).$$

Udowodnij, że:

(i) Sf jest półciągła z góry, czyli dla każdego $x_0 \in [0,1]$ mamy $\limsup_{x \to x_0} Sf(x) \leq x_0$.

(ii) f jest ciągła w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $Sf(x_0) = 0$,

(iii) $S^3 = S^2$.

Zadanie 100. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

jest pochodną pewnej funkcji F?

Zadanie 101. Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ i $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Zadanie 102. Mówimy, że funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są podobne, jeśli istnieje bijekcja h taka, że $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Czy funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są podobne? Kiedy funkcje x^2 i $x^2 + ax + b$ są podobne?

Zadanie 103 (Półciągłość)**.** Definiujemy półciągłość funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$ (X może być podzbiorem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^n$, lub przestrzenią metryczną, lub ew. topologiczną, jednak w tym ostatnim przypadku trzeba być ostrożnym z definicjami):

- f jest półciągła z góry w punkcie x_0, jeśli $\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.
- f jest półciągła z dołu w punkcie x_0, jeśli $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

[Zrobione] Pokaż, że f jest półciągła z góry (w każdym punkcie) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ jest otwarty dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$. (I analogicznie, dla ("$\geq$"; domknięty), oraz dla półciągłej z dołu).

[Zostało tylko dla rzędu macierzy] Pokaż odpowiednią półciągłość: rzędu macierzy, (więc też wymiaru jądra i obrazu ciągłej rodziny odwzorowań liniowych), liczby pierwiastków wielomianu (bez krotności), funkcji charakterystycznych zbiorów otwartych i domkniętych.

Sformułuj i pokaż twierdzenie Bolzano-Weierstrassa dla funkcji półciągłych na zbiorach zwartych (przyjmowanie wartości odpowiednio maksymalnych i minimalnych).