Zadania

8 stycznia 2016

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \ldots, n\}$, taki, że

$$\left| \sum_{k \in B} z_k \right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Wskazówka. Zadanie pochodzi ze zbioru Biler-Witkowski, zadanie nr 1.86. Połowa wskazówki/odpowiedzi tam zamieszczonej brzmi: "Ustawić liczby $z_1, \ldots, z_n, -(z_1 + \cdots + z_n)$ w ciąg o rosnących argumentach." Druga połowa za jakiś czas :), ewentualnie można sobie samemu sprawdzić.

Zadanie 2. Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Zadanie 3 (!Zadanie doprecyzowane!)**.** Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

Pokaż, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

jest zbieżny, gdy zachodzi jeden z przypadków:

- $\alpha > \frac{1}{2}$;
- $\alpha > 0$ oraz szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Wskazówka. Zadanie pochodzi ze zbioru Biler-Witkowski, zadanie nr 2.66. Wskazówka tam zamieszczona zaczyna się od: "Można pokazać, że

$$a_n = 1 + 2\sum \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!},$$

gdzie sumowanie przebiega po r, s, t naturalnych takich, że $2^r 3^s 6^t \leq n$." Reszta wskazówki mówi o odnośnikach, w tym dotyczących interpretacji rekurencji w rachunku prawdopodobieństwa. Dodatkowo, można zauważyć, jaki związek ma $\frac{12}{\log 432}$ z liczbami 2, 3 i 6:

$$\frac{12}{\log 432} = \frac{\frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{3}(3-1) + \frac{1}{6}(6-1)}{\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{6}\log 6}$$

Zadanie 5. Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - z e^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 6. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ określmy funkcję $\phi_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ wzorem $\phi_\alpha(z) = (e^z, e^{\alpha z})$. Opisz domknięcie obrazu ϕ_α w zależności od parametru α:

- dla $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$,
- dla $\alpha \in \pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,
- dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Wskazówka. Przedstaw ϕ_α jako złożenie $\mathbb{C} \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \bmod 2\pi)^2 \xrightarrow{\psi_2} \mathbb{C}^2$, gdzie pierwsze odwzorowanie przekształca

$$z \mapsto \psi_1(z) = (e^{\Re z}, e^{\Re(\alpha z)}, \Im z \bmod 2\pi, \Im(\alpha z) \bmod 2\pi)$$

a drugie

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 e^{iy_1}, x_2 e^{iy_2}).$$

Pokaż, że jest mocna zależność między $\psi_2(\overline{A})$ a $\overline{\psi_2(A)}$.

Zadanie 7 (o wielomianach symetrycznych). **Wstęp.** Niech $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ oznacza zbiór wielomianów wielu zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Czyli $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ to (nieskończenie wymiarowa) przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ składająca się z elementów:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{x}^{D_j},$$

gdzie $a_j \in \mathbb{K}$, $D_j = (d_{j1}, \ldots, d_{jn}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ oraz $\mathbf{x}^{D_j} = x_1^{d_{j1}} \cdot x_2^{d_{j2}} \cdots x_n^{d_{jn}}$. Stopień wielomianu f jak wyżej to $\deg f := \max\{\sum D_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Wielomiany można mnożyć i składać, np., jeśli $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, to $f(g_1, \ldots, g_n)$ też jest elementem $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. *Permutacja* zbioru $\{1, \ldots, n\}$ to bijekcja $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Wielomian $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ jest *symetryczny*, jeśli dla dowolnej permutacji σ mamy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Polecenie 1. Pokaż, że jeśli $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jest wielomianem symetrycznym, to istnieje dokładnie jeden wielomian $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, taki, że

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

gdzie S_k jest k-tym elementarnym wielomianem symetrycznym:

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\}, \\ \# I = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Polecenie 2. Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Znajdź odwzorowanie ciągłe "na" $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, takie, że dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mamy:

$$\phi^{-1}(\mathbf{y}) = \left\{(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \text{ jest permutacją } \{1, \ldots, n\}\right\},$$

gdzie $\mathbf{y} := \phi(\mathbf{x})$.

Zadanie 8 (zaproponowane przez pana Wojciecha Zwolińskiego). Znajdź wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, takie, że

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Zadanie 9. Odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *homeomorfizmem*, jeśli jest ciągłe, bijekcją, oraz odwzorowanie odwrotne jest ciągłe.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Pokaż, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ jest homeomorfizmem.

Wskazówka. Korzystaj uparcie z kryterium zwartości: podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony, wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone. Poza tym, pokaż (lub raczej zauważ przy wykorzystaniu powyższego), że obraz (przy funkcji ciągłej) zbioru domkniętego i ograniczonego, jest domknięty i ograniczony.

Zadanie 10. Jeśli $U \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem otwartym, $x_0 \in U$, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją, to *różniczką* funkcji f w x_0 nazywamy następującą granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}.$$

Jeśli różniczka w x_0 istnieje, to f jest *różnicznowalna* w x_0. Czy istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie?

Oznaczamy $f^{(i+1)} := (f^{(i)})'$ (o ile istnieje). Ewentualnie $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$.

Zadanie 11 (27 linii na kubice)**.** Niech S będzie zespoloną powierzchnią stopnia 3 w $\mathbb{C}^3$ (kubiką). To znaczy wybieramy wielomian $F(x, y, z)$ stopnia 3 o współczynnikach zespolonych w trzech zmiennych, następnie definiujemy:

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}.$$

Należy założyć, że "F jest wystarczająco ogólne". Intucyjnie, jeśli np weźmiemy $F = x^3$, lub $F = (ax + by + cz)^2(a'x + b'y + c'z)$, to S jest "mało ciekawe". Formalnie, powiedzenie, że "własność $P(F)$ zachodzi dla wystarczająco ogólnego wielomianu F stopnia ≤ 3" oznacza, że w zbiorze wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3 (jest to po prostu $\mathbb{C}^{20}$), istnieje otwarty gęsty podzbiór U, taki, że $P(F)$ zachodzi dla każdego $F \in U$.

Pokaż, że wystarczająco ogólna kubika zawiera dokładnie 27 prostych zespolonych, czyli obrazów różnowartościowego odwzorowania liniowego $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Wariant być może ciut prostszy (przynajmiej łatwiej sobie wyobrazić): Weźmy $F = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$, gdzie $w = ax + by + cz + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, np. $w = 1$, lub $w = 1 - (x + y + z)$. Pokaż, że

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}$$

zawiera dokładnie 27 prostych rzeczywistych.

Zadanie 12. Używając rozkładów funkcji wymiernych na elementarne podaj eleganckie warunki przy których jesteśmy w stanie policzyć

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

Sumowanie zaczynamy od dostacznie dużego n_0. Zakładamy, że $\frac{p(x)}{q(x)}$ jest funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$.

Zadanie 13. Załóżmy, że mamy ciągi $A = (a_n), B = (b_n)$ należą do l_p. Czy

$$\lim_{q \to \infty} \rho_{l_q}(A, B) = \rho_{l_\infty}(A, B)?$$

Zadanie 14 (Zbiory otwarte w l_p)**.** Ustalmy $p, p' \in [1, \infty]$ takie, że $p \le p'$.

(i) Załóżmy, że $U \subset l_p$ jest zbiorem otwartym. Czy istnieje otwarty podzbiór $U' \subset l_{p'}$, taki, że $U = U' \cap l_p$.

(ii) Załóżmy, że $U' \subset l_{p'}$ jest zbiorem otwartym. Czy $U = U' \cap l_p$ jest otwarty w l_p?

Zadanie 15. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10},$$

gdzie $\{x_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ jest zbiorem dodatnich rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = x$.

Zadanie 16. Niech a_n będzie takim malejącym ciągiem o wyrazach nieujemnych, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest rozbieżny. Niech ponadto

$$b_n = \min\left\{a_n, \frac{1}{\ln n}\right\}, n > 1.$$

Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ też jest rozbieżny.

Zadanie 17 (zrobione 8.I)**.** Zbadaj zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregów:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e - (1 + \frac{1}{n})^{n+1})$

(Zostało sprawdzenie bezwzględnej zbieżności w (ii).)

Zadanie 18 (zrobione 8.I)**.** Niech a_n będzie rosnącym ciągiem o wyrazach dodatnich. Udowodnij, że dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}}$$

jest zbieżny.

(Zostało pokazanie zadania dla $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$*,* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*.)*

Zadanie 19 (zrobione 8.I)**.** Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ w zależności od parametrów $a, b > 0$.

Zadanie 20 (!!doprecyzowane!!)**.** Załóżmy, że f jest taką dodatnią funkcją malejącą do zera w przedziale $(0, +\infty)$, że $nf(n)$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do $+\infty$. Niech S będzie sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} f(n)$. Znajdź takie przestawienie wyrazów tego szeregu, aby jego suma była równa $S + l$, gdzie l jest dowolnie zadaną liczbą rzeczywistą.

Dla przykładu, znajdź takie przestawienie wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, tak aby suma powiększyła sie o 1.

Zadanie 21 (zrobione 8.I)**.** Niech p_n będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych większych niż 1. Udowodnij wzór Eulera:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ dla } x > 1.$$

Zadanie 22 (zrobione 8.I)**.** Zbadać liczbę pierwiastków równania $a^x = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$.

Zadanie 23 (zrobione 12.I)**.** Rozwiązać równanie $(\sin x)^{\frac{1}{2}} + (\cos x)^{\frac{1}{2}} = t$.

Zadanie 24 (zrobione 12.I)**.** Załóżmy, że ciąg a_n jest zbieżny do zera. Pokaż, że szeregi

$$\sum a_n, \quad \sum (a_n + a_{n+1})$$

są jednocześnie zbieżne bądź jednocześnie rozbieżne.

Zadanie 25 (zrobione 12.I)**.** Wykaż, że szereg $\sum \frac{\cos n \sin(na)}{n}$ jest zbieżny dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 26. Udowodnij, że wielomiany P_n zdefinionwane rekurencyjnie wzorami $P_0 = 1$, $P_1 = x + 1$, $P_{n+1} = P_n + xP_{n-1}$ (dla $n \geq 1$) mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 27. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$ i spełnia warunek $f(0) = f(n)$. Pokaż, że równanie $f(x) = f(y)$ ma co najmniej n różnych rozwiązań takich, że $x - y$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 28. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $a \in \mathbb{R}$ warunek $\lim_{n\to\infty} f(\frac{a}{n}) = 0$. Czy istnieje $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Zadanie 29 (zrobione 12.I)**.** Pokaż, że jeśli homeomorfizm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $f^n(x) = x$, to $f^2(x) = x$.

Zadanie 30 (zrobione 12.I)**.** Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mające własnść Darboux takie, że dla pewnego $m \geq 1$ mamy $f^m(x) = -x$, dla wszystkich x.

Zadanie 31 (zrobione 12.I)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest malejąca i ciągła. Udowodnij, że:

(i) istnieje jedyny punkt stały f,

(ii) zbiór $\{x\colon f^2(x) = x\}$ jest nieskończony, lub ma nieparzystą ilość elementów.

Dla ustalonego $n > 2$ zbadać strukturę zbioru $\{x\colon f^n(x) = x\}$.

Zadanie 32. Funkcja $f\colon K \to K$ jest ciągłym odwzorowaniem zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}$ w siebie. Punkt $x_0 \in K$ ma następującą własność: każdy punkt skupienia ciągu iteracji $f^n(x_0)$ jest punktem stałym f. Pokaż, że ciąg $f^n(x_0)$ jest zbieżny.

Podaj przykład, że dla zwartych podzbiorów płaszczyzny powyższy fakt nie jest prawdziwy.

Zadanie 33. Dla ograniczonej funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiujemy funkcję:

$$Sf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \sup \{|f(y) - f(z)| \mid |x - z| < \epsilon, |x - y| < \epsilon\}.$$

Udowodnij, że:

(i) Sf jest półciągła z góry,

(ii) f jest ciągła w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $Sf(x_0) = 0$,

(iii) $S^3 = S^2$.

Zadanie 34. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

jest pochodną pewnej funkcji F?

Zadanie 35. Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ i $f'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Zadanie 36 (zrobione 12.I)**.** Mówimy, że funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są podobne, jeśli istnieje bijekcja h taka, że $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Czy funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są podobne? Kiedy funkcje x^2 i $x^2 + ax + b$ są podobne?