Zadania

22 grudnia 2015

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \dots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \dots, n\}$, taki, że

$$\left| \sum_{k \in B} z_k \right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Wskazówka. Zadanie pochodzi ze zbioru Biler-Witkowski, zadanie nr 1.86. Połowa wskazówki/odpowiedzi tam zamieszczonej brzmi: "Ustawić liczby $z_1, \dots, z_n, -(z_1 + \dots + z_n)$ w ciąg o rosnących argumentach." Druga połowa za jakiś czas :), ewentualnie można sobie samemu sprawdzić.

Zadanie 2. Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Zadanie 3. Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \dots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \dots + S_n.$$

Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Wskazówka. Zadanie pochodzi ze zbioru Biler-Witkowski, zadanie nr 2.66. Wskazówka tam zamieszczona zaczyna się od: "Można pokazać, że

$$a_n = 1 + 2\sum \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!},$$

gdzie sumowanie przebiega po r, s, t naturalnych takich, że $2^r 3^s 6^t \leq n$." Reszta wskazówki mówi o odnośnikach, w tym dotyczących interpretacji rekurencji w rachunku prawdopodobieństwa.

Zadanie 5. Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - ze^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 6. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ określmy funkcję $\phi_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ wzorem $\phi_\alpha(z) = (e^z, e^{\alpha z})$. Opisz domknięcie obrazu ϕ_α w zależności od parametru α:

- dla $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$,
- dla $\alpha \in \pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,
- dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Wskazówka. Przedstaw ϕ_α jako złożenie $\mathbb{C} \overset{\psi_1}{\to} \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \bmod 2\pi)^2 \overset{\psi_2}{\to} \mathbb{C}^2$, gdzie pierwsze odwzorowanie przekształca

$$z \mapsto \psi_1(z) = (e^{\Re z}, e^{\Re(\alpha z)}, \Im z \bmod 2\pi, \Im(\alpha z) \bmod 2\pi)$$

a drugie

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 e^{iy_1}, x_2 e^{iy_2}).$$

Pokaż, że jest mocna zależność między $\psi_2(\overline{A})$ a $\overline{\psi_2(A)}$.

Zadanie 7 (lokalnie jednostajna zbieżność)**.** Niech A i B będą podzbiorami $\mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg funkcji $f_n \colon A \to B$ jest *lokalnie jednostajnie zbieżny* do funkcji $f \colon A \to B$, jeśli każdy punkt $x \in A$ ma otoczenie otwarte $U_x = (x - \delta, x + \delta) \cap A$ (dla pewnego $\delta > 0$), takie, że $f_n|_{U_x} \rightrightarrows f_{U_x}$.

(i) (zadanie wyłącznie domowe) Kontempluj przez co najmniej 10 minut definicje lokalnie jednostajnej zbieżności i jednostajnej zbieżności. W szczególności:

  - Zrozum, że jednostajna zbieżność implikuje lokalnie jednostajną zbieżność.

- Zrozum, że A, B w definicji jednostajnej zbieżności może byc dowolnym zbiorem, na którym mamy sensowne pojęcie odległości dwóch punktów (tzw przestrzenią metryczną). Jeśli nie chcesz wnikać w przestrzenie metryczne, to rozważaj wyłącznie podzbiory $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (niżej też).
- Zrozum, że B w definicji lokalnie jednostajnej zbieżności może byc dowolną przestrzenią metryczną.
- Zmodyfikuj definicję lokalnie jednostajnej zbieżności, aby A mogło być dowolną przestrzenią metryczną.

(ii) Pokaż, że granica lokalnie jednostajna funkcji ciągłych jest ciągła.

(iii) Udowodnij, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem domkniętym, ograniczonym (*ogólniej: zwartym*), to lokalnie jednostajna zbieżność implikuje jednostajną zbieżność.

(iv) Podaj przykład ciągu funkcji ciągłych, który jest lokalnie jednostajnie zbieżny, ale nie jest jednostajnie zbieżny.

Zadanie 8 (o wielomianach symetrycznych)**. Wstęp.** Niech $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ oznacza zbiór wielomianów wielu zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Czyli $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ to (nieskończenie wymiarowa) przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ składająca się z elementów:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{x}^{D_j},$$

gdzie $a_j \in \mathbb{K}$, $D_j = (d_{j1}, \ldots, d_{jn}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ oraz $\mathbf{x}^{D_j} = x_1^{d_{j1}} \cdot x_2^{d_{j2}} \cdots x_n^{d_{jn}}$. Stopień wielomianu f jak wyżej to $\deg f := \max\{\sum D_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Wielomiany można mnożyć i składać, np., jeśli $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, to $f(g_1, \ldots, g_n)$ też jest elementem $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. *Permutacja* zbioru $\{1, \ldots, n\}$ to bijekcja $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Wielomian $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ jest *symetryczny*, jeśli dla dowolnej permutacji σ mamy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Polecenie 1. Pokaż, że jeśli $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jest wielomianem symetrycznym, to istnieje dokładnie jeden wielomian $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, taki, że

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

gdzie S_k jest k-tym elementarnym wielomianem symetrycznym:

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\}, \\ \#I = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Polecenie 2. Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Znajdź odwzorowanie ciągłe "na" $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, takie, że dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mamy:

$$\phi^{-1}(\mathbf{y}) = \left\{ (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \text{ jest permutacją } \{1, \ldots, n\} \right\},$$

gdzie $\mathbf{y} := \phi(\mathbf{x})$.

Zadanie 9 (zaproponowane przez pana Wojciecha Zwolińskiego)**.** Znajdź wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, takie, że

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Zadanie 10. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem. Odwzorowanie $\phi\colon A \to \mathbb{R}^m$ jest *ciągłe* (w sensie ℓ_p), jeśli

$$\forall_{x \in A} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in A} \ \rho_{\ell_p}(x, y) \le \delta \Longrightarrow \rho_{\ell_p}(\phi(x), \phi(y)) \le \epsilon.$$

Pokaż, że ϕ jest ciągłe, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego $U \subset \mathbb{R}^m$ przeciwobraz $\phi^{-1}(U) = V \cap A$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty. (Mówimy, że przeciwobraz jest otwarty w A.) W szczególności, ciągłość nie zależy od wyboru p.

Zadanie 11. Odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *homeomorfizmem*, jeśli jest ciągłe, bijekcją, oraz odwzorowanie odwrotne jest ciągłe.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Pokaż, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ jest homeomorfizmem.

Zadanie 12. Jeśli $U \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem otwartym, $x_0 \in U$, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją, to *różniczką* funkcji f w x_0 nazywamy następującą granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Jeśli różniczka w x_0 istnieje, to f jest *różniczkowalna* w x_0. Czy istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie?

Oznaczamy $f^{(i+1)} := (f^{(i)})'$ (o ile istnieje). Ewentualnie $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$.

Zadanie 13 (27 linii na kubice)**.** Niech S będzie zespoloną powierzchnią stopnia 3 w $\mathbb{C}^3$ (kubiką). To znaczy wybieramy wielomian $F(x, y, z)$ stopnia 3 o współczynnikach zespolonych w trzech zmiennych, następnie definiujemy:

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}.$$

Należy założyć, że "F jest wystarczająco ogólne". Intucyjnie, jeśli np weźmiemy $F = x^3$, lub $F = (ax + by + cz)^2(a'x + b'y + c'z)$, to S jest "mało ciekawe". Formalnie, powiedzenie, że "własność $P(F)$ zachodzi dla wystarczająco ogólnego wielomianu F stopnia ≤ 3" oznacza, że w zbiorze wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3 (jest to po prostu $\mathbb{C}^{20}$), istnieje otwarty gęsty podzbiór U, taki, że $P(F)$ zachodzi dla każdego $F \in U$.

Pokaż, że wystarczająco ogólna kubika zawiera dokładnie 27 prostych zespolonych, czyli obrazów różnowartościowego odwzorowania liniowego $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Wariant być może ciut prostszy (przynajmiej łatwiej sobie wyobrazić): Weźmy $F = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$, gdzie $w = ax + by + cz + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, np. $w = 1$, lub $w = 1 - (x + y + z)$. Pokaż, że

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}$$

zawiera dokładnie 27 prostych rzeczywistych.

Zadanie 14. Używając rozkładów funkcji wymiernych na elementarne podaj eleganckie warunki przy których jesteśmy w stanie policzyć

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

Sumowanie zaczynamy od dostacznie dużego n_0. Zakładamy, że $\frac{p(x)}{q(x)}$ jest funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$.

Zadanie 15. Załóżmy, że mamy ciągi $A = (a_n), B = (b_n)$ należą do l_p. Czy

$$\lim_{q \to \infty} \rho_{l_q}(A, B) = \rho_{l_\infty}(A, B)?$$

Zadanie 16 (Zbiory otwarte w l_p)**.** Ustalmy $p, p' \in [1, \infty]$ takie, że $p \leq p'$.

(i) Załóżmy, że $U \subset l_p$ jest zbiorem otwartym. Czy istnieje otwarty podzbiór $U' \subset l_{p'}$, taki, że $U = U' \cap l_p$.

(ii) Załóżmy, że $U' \subset l_{p'}$ jest zbiorem otwartym. Czy $U = U' \cap l_p$ jest otwarty w l_p?

Zadanie 17. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10},$$

gdzie $\{x_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ jest zbiorem dodatnich rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = x$.

Zadanie 18. Podać przykład szeregu o wyrazach dodatnich, który jest zbieżny, ale nie spełnia warunku $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Zadanie 19. Niech a_n będzie takim malejącym ciągiem o wyrazach nieujemnych, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest rozbieżny. Niech ponadto

$$b_n = \min\left\{a_n, \frac{1}{\ln n}\right\}, n > 1.$$

Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ też jest rozbieżny.

Zadanie 20. Zbadaj zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregów:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e - (1 + \frac{1}{n})^n)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e - (1 + \frac{1}{n})^{n+1})$

(Zostało sprawdzenie bezwzględnej zbieżności w (ii).)

Zadanie 21. Niech a_n będzie rosnącym ciągiem o wyrazach dodatnich. Udowodnij, że dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}}$$

jest zbieżny.

(Zostało pokazanie zadania dla $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.)

Zadanie 22. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \cos a_n, \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 23. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ w zależności od parametrów $a, b > 0$.

Zadanie 24. Załóżmy, że f jest taką dodatnią funkcją malejącą do zera w przedziale $(0, +\infty)$, że $nf(n)$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do $+\infty$. Niech S będzie sumą szeregu $\sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$. Znajdź takie przestawienie wyrazów tego szeregu, aby jego suma była równa $S + l$, gdzie l jest dowolnie zadaną liczbą rzeczywistą.

Zadanie 25. Niech p_n będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych większych niż 1. Udowodnij wzór Eulera:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \text{ dla } x > 1.$$

Zadanie 26. Zbadać liczbę pierwiastków równania $a^x = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$.

Zadanie 27. Udowodnić, że dla $k \geq 3$ równanie $(\log x)^k = x$ ma na półprostej $[1, \infty)$ dokładnie dwa rozwiązania r_k, s_k, takie że $r_k \to e$, $s_k \to \infty$, gdy $k \to \infty$.

Zadanie 28. Rozwiązać równanie $(\sin x)^{\frac{1}{2}} + (\cos x)^{\frac{1}{2}} = t$.