Zadania

24 listopada 2015

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \ldots, n\}$, taki, że

$$\left|\sum_{k\in B} z_k\right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Zadanie 2. Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Zadanie 3. Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Zadanie 5. Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - ze^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 6. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ określmy funkcję $\phi_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ wzorem $\phi_\alpha(z) = (e^z, e^{\alpha z})$. Opisz domknięcie obrazu ϕ_α w zależności od parametru α:

- dla $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$,
- dla $\alpha \in \pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,
- dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Zadanie 7 (nierówność Schwarza)**.** Pokaż, że:

(i) Dla dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych) x_i, y_i zachodzi:

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n|^2 \leq (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)(|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2).$$

(ii) Dla dowolnych ciągów liczb (rzeczywistych lub zespolonych) $(x_i), (y_i)$, takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$ zachodzi:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right).$$

(iii) Dla dowolnych funkcji $f, g \colon : [a, b] \to \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, takich, że całki $\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ oraz $\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x$ istnieją i są skończone mamy:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right).$$

Zadanie 8 (nierówność Höldera)**.** Załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pokaż, że:

(i) Dla dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych) x_i, y_i zachodzi:

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(ii) Dla dowolnych ciągów liczb (rzeczywistych lub zespolonych) $(x_i), (y_i)$, takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q < \infty$ zachodzi:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(iii) Dla dowolnych funkcji $f, g\colon : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, takich, że całki $\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x$ oraz $\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x$ istnieją i są skończone mamy:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Zadanie 9 (jednostajna granica ciągu funkcji ciągłych jest ciągła)**.** Niech A i B będą podzbiorami $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ (*ogólniej, za A i/lub B można wziąć dowolny podzbiór $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ lub inną przestrzeń, w której sensowne jest określenie odległości między dwoma punktami*). Mówimy, że ciąg funkcji $f_n\colon A \to B$ jest *jednostajnie zbieżny* do funkcji $f\colon A \to B$, jeśli

$$\forall_\epsilon \exists_N \forall_{n \ge N} \forall_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon.$$

W takiej sytuacji oznaczamy $f_n \rightrightarrows f$. Pokaż, że jeśli $f_n \rightrightarrows f$ i funkcje f_n są ciągłe, to f jest ciągła.

Zadanie 10 (lokalnie jednostajna zbieżność)**.** Niech A i B będą podzbiorami $\mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg funkcji $f_n\colon A \to B$ jest *lokalnie jednostajnie zbieżny* do funkcji $f\colon A \to B$, jeśli każdy punkt $x \in A$ ma otoczenie otwarte $U_x = (x - \delta, x + \delta) \cap A$ (dla pewnego $\delta > 0$), takie, że $f_n|_{U_x} \rightrightarrows f_{U_x}$.

(i) (zadanie wyłącznie domowe) Kontempluj przez co najmniej 10 minut definicje lokalnie jednostajnej zbieżności i jednostajnej zbieżności. W szczególności:

- Zrozum, że jednostajna zbieżność implikuje lokalnie jednostajną zbieżność.
- Zrozum, że A, B w definicji jednostajnej zbieżności może byc dowolnym zbiorem, na którym mamy sensowne pojęcie odległości dwóch punktów (tzw przestrzenią metryczną). Jeśli nie chcesz wnikać w przestrzenie metryczne, to rozważaj wyłącznie podzbiory $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (niżej też).
- Zrozum, że B w definicji lokalnie jednostajnej zbieżności może byc dowolną przestrzenią metryczną.
- Zmodyfikuj definicję lokalnie jednostajnej zbieżności, aby A mogło być dowolną przestrzenią metryczną.

(ii) Pokaż, że granica lokalnie jednostajna funkcji ciągłych jest ciągła.

(iii) Udowodnij, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem domkniętym, ograniczonym (*ogólniej: zwartym*), to lokalnie jednostajna zbieżność implikuje jednostajną zbieżność.

(iv) Podaj przykład ciągu funkcji ciągłych, który jest lokalnie jednostajnie zbieżny, ale nie jest jednostajnie zbieżny.

Zadanie 11 (o wielomianach symetrycznych)**. Wstęp.** Niech $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ oznacza zbiór wielomianów wielu zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Czyli $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ to (nieskończenie wymiarowa) przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ składająca się z elementów:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{x}^{D_j},$$

gdzie $a_j \in \mathbb{K}$, $D_j = (d_{j1}, \ldots, d_{jn}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ oraz $\mathbf{x}^{D_j} = x_1^{d_{j1}} \cdot x_2^{d_{j2}} \cdots x_n^{d_{jn}}$. Stopień wielomianu f jak wyżej to $\deg f := \max\{\sum D_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Wielomiany można mnożyć i składać, np., jeśli $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, to $f(g_1, \ldots, g_n)$ też jest elementem $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. *Permutacja* zbioru $\{1, \ldots, n\}$ to bijekcja $\sigma \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Wielomian $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ jest *symetryczny*, jeśli dla dowolnej permutacji σ mamy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Polecenie 1. Pokaż, że jeśli $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jest wielomianem symetrycznym, to istnieje dokładnie jeden wielomian $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, taki, że

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

gdzie S_k jest k-tym elementarnym wielomianem symetrycznym:

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\}, \\ \#I = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Polecenie 2. Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Znajdź odwzorowanie ciągłe "na" $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, takie, że dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mamy:

$$\phi^{-1}(\mathbf{y}) = \left\{ (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \text{ jest permutacją } \{1, \ldots, n\} \right\},$$

gdzie $\mathbf{y} := \phi(\mathbf{x})$.

Zadanie 12 (zaproponowane przez pana Wojciecha Zwolińskiego)**.** Znajdź wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, takie, że

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Zadanie 13. Dla $p \in [1, \infty)$ definiujemy *odległość w sensie* ℓ_p dwóch punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ w $\mathbb{R}^n$:

$$\rho_{\ell_p}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jeśli $p = \infty$, to

$$\rho_{\ell_\infty}(x, y) = \max |x_i - y_i|.$$

Pokaż, że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\lim_{p \to \infty} \rho_{\ell_p}(x, y) = \rho_{\ell_\infty}(x, y).$$

Pokaż, że (dla dowolnego $p \in [1, \infty]$) spełniony jest warunek trójkąta:

$$\rho_{\ell_p}(x, y) + \rho_{\ell_p}(y, z) \geq \rho_{\ell_p}(x, z).$$

Zadanie 14. n-wymiarowa *kula otwarta (w sensie ℓ_p)* o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ i o promieniu r, to zbiór

$$B_{\ell_p}(x, r) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \rho_{\ell_p}(x, y) < r \right\}.$$

Narysuj i wyobraź sobie kule dla niektórych wartości p, n, np:

- $n = 1$,
- $n = 2$ oraz: $p = 1$ lub $p \in (1, 2)$, lub $p = 2$, lub $p \in (2, \infty)$, lub $p = \infty$,
- $n = 3$ oraz: $p = 1$ lub $p = 2$ lub $p = \infty$,
- $\ldots$

Zadanie 15. Podzbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest *otwarty* (w sensie ℓ_p), jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $B_{\ell_p}(x, \epsilon) \subset U$. Pokaż, że otwartość nie zależy od wyboru p, czyli dla dowolnych $p, q \in [1, \infty]$ zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty w sensie ℓ_p wtedy i tylko wtedy, gdy jest otwarty w sensie ℓ_q. W tej sytuacji mówimy, że U jest otwarty.

Zadanie 16. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem. Odwzorowanie $\phi \colon A \to \mathbb{R}^m$ jest *ciągłe* (w sensie ℓ_p), jeśli

$$\forall_{x \in A} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in A} \ \rho_{\ell_p}(x, y) \leq \delta \Longrightarrow \rho_{\ell_p}(\phi(x), \phi(y)) \leq \epsilon.$$

Pokaż, że ϕ jest ciągłe, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego $U \subset \mathbb{R}^m$ przeciwobraz $\phi^{-1}(U) = V \cap A$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty. (Mówimy, że przeciwobraz jest otwarty w A.) W szczególności, ciągłość nie zależy od wyboru p.

Zadanie 17. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *domknięty*, jeśli jego dopełnienie $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest otwarte, czyli dla każdego $x \in A$ oraz $\epsilon \geq 0$ mamy $B_{\ell_p}(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ (p możemy wybrać dowolne).

Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *ograniczony*, jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, takie, że $A \subset [-M, M]^n$, czyli moduł każdej współrzędnej dowolnego punktu A jest ograniczony przez wspólną stałą M.

Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$ (wariant “minimum” zadania : $n = 1$). Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) A jest domknięty i ograniczony.

(ii) Dla dowolnego ciągu x_k punktów z A, istnieje podciąg wybranych elementów x_{n_k} (gdzie $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$) zbieżny do pewnego $x \in A$. (O przestrzeni spełniającej ten warunek mówimy, że jest *ciągowo zwarta.*)

(iii) Jeśli I jest pewnym (być może nieskończonym) zbiorem indeksów, oraz dla każdego $i \in I$ mamy otwarty $U_i \subset \mathbb{R}^n$, takie że

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

to istnieje skończenie wiele $i_1, \ldots, i_m \in I$, takich, że

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

(Ten warunek w skrócie wyrażamy “z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone”. Jest to jeden z dwóch warunków, definiujących bardzo ważne pojęcie *zwartości* przestrzeni topologicznych. Drugi warunek (*warunek Hausdorffa* (T_2)) jest automatycznie spełniony dla podzbiorów $\mathbb{R}^n$).

(Zadanie jest częścią większej teorii topologicznej: Przestrzeń zwarta jest ciągowo zwarta; przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo zwarta; w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ podzbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.)

Zadanie 18. Pokaż, że $U \subset \mathbb{R}$ jest otwarty, wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najwyżej przeliczalną sumą rozłącznych przedziałów i półprostych:

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i),$$

gdzie $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ oraz $\cdots < a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1} < \cdots$ (dopuszczamy $a_0 = -\infty$ oraz $b_N = +\infty$).

Zadanie 19. Dla podzbiorów $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *izometrią* (dla metryk ℓ_p na A i ℓ_q na B), jeśli dla każdych $x, y \in A$ mamy

$$\rho_{\ell_q}(\phi(x), \phi(y)) = \rho_{\ell_p}(x, y).$$

Pokaż, że izometria jest odwzorowaniem ciągłym i różnowartościowym.

Zadanie 20. Odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *homeomorfizmem*, jeśli jest ciągłe, bijekcją, oraz odwzorowanie odwrotne jest ciągłe.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Pokaż, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ jest homeomorfizmem.

Zadanie 21. Jeśli $U \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem otwartym, $x_0 \in U$, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją, to *różniczką* funkcji f w x_0 nazywamy następującą granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Jeśli różniczka w x_0 istnieje, to f jest *różnicznowalna* w x_0.

(i) Pokaż, że jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x, to jest ciągła w punkcie x. Oczywiście, odwrotne stwierdzenie nie zachodzi.

(ii) Pokaż przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w punkcie 0, ale nigdzie indziej.

(iii) Czy istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie?

Oznaczamy $f^{(i+1)} := (f^{(i)})'$ (o ile istnieje). Ewentualnie $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$.

Zadanie 22. Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}$, funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest klasy C^0 (piszemy $f \in C^0(U, \mathbb{R})$, lub $f \in C^0(U)$, lub $f \in C^0$), jeśli f jest ciągła na U.

Dla $i \in \mathbb{N}$, funkcja f jest klasy C^i, jeśli $f' \in C^{i-1}$.

Funkcja f jest klasy C^∞, jeśli $f \in C^i$ dla każdego $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Podaj przykład niezerowej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^∞, dla której znikają wartość oraz wszystkie różniczki w 0:

$$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(i)}(0) = \cdots.$$

Zadanie 23 (27 linii na kubice)**.** Niech S będzie zespoloną powierzchnią stopnia 3 w $\mathbb{C}^3$ (kubiką). To znaczy wybieramy wielomian $F(x, y, z)$ stopnia 3 o współczynnikach zespolonych w trzech zmiennych, następnie definiujemy:

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z) = 0 \right\}.$$

Należy założyć, że "F jest wystarczająco ogólne". Intucyjnie, jeśli np weźmiemy $F = x^3$, lub $F = (ax + by + cz)^2(a'x + b'y + c'z)$, to S jest "mało ciekawe". Formalnie, powiedzenie, że "własność $P(F)$ zachodzi dla wystarczająco ogólnego wielomianu F stopnia ≤ 3" oznacza, że w zbiorze wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3 (jest to po prostu $\mathbb{C}^{20}$), istnieje otwarty gęsty podzbiór U, taki, że $P(F)$ zachodzi dla każdego $F \in U$.

Pokaż, że wystarczająco ogólna kubika zawiera dokładnie 27 prostych zespolonych, czyli obrazów różnowartościowego odwzorowania liniowego $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Wariant być może ciut prostszy (przynajmiej łatwiej sobie wyobrazić): Weźmy $F = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$, gdzie $w = ax + by + cz + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, np. $w = 1$, lub $w = 1 - (x + y + z)$. Pokaż, że

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

zawiera dokładnie 27 prostych rzeczywistych.