Zadania

13 listopada 2015

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \ldots, n\}$, taki, że

$$\left| \sum_{k \in B} z_k \right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Zadanie 2. Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Zadanie 3. Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Zadanie 5. Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$, wartości a_1 obliczyć:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - z e^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 6. Ciąg a_n określamy wzorem:

$$a_1 = x, \qquad a_{n+1} = \log \frac{e^{a_n} - 1}{a_n}.$$

Pokazać, że

$$1 + a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \cdots = e^x.$$

Zadanie 7. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}} = 3$$

Zadanie 8. a_n jest ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1)$. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 + a_2(1-a_1) + a_3(1-a_1)(1-a_2) + \cdots = 1.$$

Zadanie 9. Niech A będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych, które w swoim zapisie dziesiętnym nie mają cyfry 0. Wyznacz wszystkie $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których szereg $\sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

Zadanie 10. Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$.

Zadanie 11. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ określmy funkcję $\phi_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ wzorem $\phi_\alpha(z) = (e^z, e^{\alpha z})$. Opisz domknięcie obrazu ϕ_α w zależności od parametru α:

- dla $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$,
- dla $\alpha \in \pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,
- dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Zadanie 12. Definiujemy $f_n \colon [0,1] \to [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ jako n-te przybliżenie *krzywej Peano*: czyli w każdym kroku, każdy kwadrat dzielimy na dziewięć mniejszych kwadratów i zastępujemy przekątną przez łamaną biegnącą, która jest sumą przekątnych tych kwadratów (według rysunku na tablicy na ćwiczeniach). Pokazać, że:

(i) dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0,1]^2$,

(ii) funkcja $f \colon [0,1] \to [0,1]^2$ określona wzorem $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (jest to *granica punktowa* ciągu funkcji f_n) jest ciągła (*uwaga na boku: granica punktowa ciągu funkcji ciągłych* ***nie*** *musi być ciągła!*),

(iii) funkcja $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ jest “na”.

Zadanie 13 (nierówność Schwarza)**.** Pokaż, że:

(i) Dla dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych) x_i, y_i zachodzi:

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n|^2 \leq (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)(|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2).$$

(ii) Dla dowolnych ciągów liczb (rzeczywistych lub zespolonych) $(x_i), (y_i)$, takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$ zachodzi:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right).$$

(iii) Dla dowolnych funkcji $f, g\colon : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, takich, że całki $\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ oraz $\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x$ istnieją i są skończone mamy:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right).$$

Zadanie 14 (nierówność Höldera)**.** Załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pokaż, że:

(i) Dla dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych) x_i, y_i zachodzi:

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(ii) Dla dowolnych ciągów liczb (rzeczywistych lub zespolonych) $(x_i), (y_i)$, takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q < \infty$ zachodzi:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(iii) Dla dowolnych funkcji $f, g\colon : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, takich, że całki $\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x$ oraz $\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x$ istnieją i są skończone mamy:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$