Zadania

27 października 2015

Zadania wiszące

(czyli takie, które były podane na dotychczasowych ćwiczeniach, ale jeszcze nie zostały rozwiązane)

Zadanie 1. $S \subset \mathbb{Z}$ jest podzbiorem o dopełnieniu skończonym. Pokaż, że istnieją dwa nieskończone zbiory $X, Y \subset \mathbb{Z}$, takie że $X+Y = \{x+y | x \in X, y \in Y\} = S$ oraz każdy element $s \in S$ przedstawia się na dokładnie jeden sposób w postaci $x+y$, gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$.

Zadanie 2. Policz

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

Zadanie 3. Pokaż, że granice następujących szeregów istnieją oraz, że $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$:

$$a = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \qquad \text{(znaki na przemian, ułamki po kolei)}$$

$$b = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \qquad \text{(dwie odwrotności nieparzystych, minus jedna odwrotność parzystej)}$$

Zadanie 4. Wykazać, że istnieją homografie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, które przenoszą ustalone trzy punkty na dowolne inne trzy punkty, np. $0, 1, i$. Pokazać, że odwzorowanie odwrotne do homografii jest homografią.

(Też: złożenie homografii jest homografią.)

Zadania bieżące

Zadanie 5. Pokaż, że dla $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 +$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 +$$

Znajdź podobny wzór na $\log(1+x)$ dla $|x| < 1$, tzn, ciąg liczb rzeczywistych a_n taki, że

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Zadanie 6. Dla jakich wartości liczby rzeczywistej $\alpha > 0$ szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest zbieżny?

Zadanie 7. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

jest liczbą niewymierną.

Zadania do domu pisemnie na 3.XI

Zadanie 8. Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Zadanie 9. Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_p$ będą dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)} - n \right).$$