

# Zadania

16 października 2015

**Zadanie 1.**  $P(t)$  jest wielomianem, który dla argumentów wymiernych przyjmuje wartości wymierne, a dla argumentów niewymiernych przyjmuje wartości niewymierne. Pokaż, że  $P(t) = at + b$  dla stałych  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**Zadanie 2.**  $P(t)$  jest wielomianem, który dla argumentów rzeczywistych przyjmuje wartości rzeczywiste, a dla argumentów nierzeczywistych przyjmuje wartości nierzeczywiste. Pokaż, że  $P(t) = at + b$  dla stałych  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie 3.** Udowodnij, że dla dowolnego  $z \in \mathbb{C}$  istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ .

Definiujemy  $e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ .

**Zadanie 4.** Udowodnij, że  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ .

**Zadanie 5.** Udowodnij, że  $e^{z_1 z_2} = (e^{z_1})^{z_2}$ .

**Zadanie 6.** Policz  $e^{\pi i}$ .

**Zadanie 7.** Pokaż, że odwzorowanie  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  jest inwersją płaszczyzny zespolonej względem okręgu o promieniu 1 i środku w  $0 \in \mathbb{C}$ .