Miary Younga jako narzędzie do identyfikacji granic

Jakub Woźnicki

April 6, 2020

Motywacja

Często w analizie musimy zastanawiać się, gdzie dla ciągu funkcji V_j zawartego w pewnej przestrzeni (na przykład przestrzeni L^p dla jakiegoś p) zbiega całka związana z tym ciągiem. Dla zaznajomionych z Analizą Funkcjonalną na pewno przypomina to słabą zbieżność w przestrzeni L^p. Jednak, gdy na nasz ciąg nałożymy funkcję f inną niż afiniczną, kompatybilność ze słabymi granicami znika. Czyli znając słabą granicę V_j, nie znamy słabej granicy $f(V_j)$. Aby się z tym uporać wprowadzamy definicję miary Younga.

Podstawowa definicja i fundamentalne twierdzenie

Miara Younga. Miarą Younga nazwiemy przekształcenie $\nu : \Omega \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, gdzie Ω to pewien podzbiór $\mathbb{R}^n$, a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ to zbiór miar Radona (czyli miar Borelowski regularnych, lokalnie skończonych), takie, że dla każdego $x \in \Omega$, ν_x jest miarą probabilistyczną i przekształcenie $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y) d\nu_x(y)$ jest mierzalne dla każdego $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Fundamentalne Twierdzenie. Jeżeli V_j jest ograniczonym w $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ciągiem funkcji, dla $1 \leqslant p < \infty$, to istnieje miara Younga ν i pewien podciąg (indeksowany tak samo), że

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^d} |y|^p d\nu_x(y) dx < \infty$$

i dla każdej funkcji Caratheodory'ego $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takiej, że $(f(x, V_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ jest równocałkowalny i ograniczony w L^1

$$f(x, V_j(x)) \rightharpoonup \langle \nu_x, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d\nu_x(y) \text{ w } L^1$$

Identyfikacja słabej granicy w L^p

Jednym z podstawowych zastosowan jest identyfikacja granicy ograniczonego ciągu w L^p. W gruncie rzeczy wiemy z tw. Banacha-Alaoglu, że taka granica powinna istnieć dla $1 < p < \infty$, jednak niekoniecznie jesteśmy w stanie jej zidentyfikować. Pomaga nam w tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Jeżeli V_j jest ograniczonym ciągiem funkcji w L^p dla $1 < p < \infty$, to zbiega słabo do $\langle \nu_x, id \rangle$, gdzie ν to miara Younga przez niego generowana.

Znaczący jest tu brak L^1 (L^∞ pominęliśmy z trochę innych powodów). Przestrzeń ta nie jest refleksywna jak L^p rozważane w twierdzeniu, co powoduje pewne komplikacje. Mianowicie jeżeli ciąg funkcji zaczyna koncentrować się na coraz mniejszych zbiorach, to nie możemy mówić o równocałkowalności potrzebnej w Fundamentalnym Twierdzeniu.

Lemat Chacona

Okazuje się, że aby pozbyć się problemu koncentracji możemy po prostu wyrzucić problematyczne zbiory. Wprowadzamy następującą definicję.

Zbieżność odcinająca. Powiemy, że ciąg V_j zawarty w L^1 ma granicę V w sensie odcinającym, jeśli istnieje ciąg Ω_n mierzalnych zbiorów, takich, że $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ i $|\Omega_n| \searrow 0$ oraz V_j zbiega słabo do V w $L^1(\Omega \setminus \Omega_n)$ dla każdego n.

Podobnie jak poprzednio ciągi ograniczone mają granicę w powyższym sense. Mówi o tym następujący lemat

Lemat Chacona. Jeżeli V_j jest ograniczonym ciągiem w L^1, to istnieje jego podciąg, zbieżny w sensie odcinającym.

Myślę, że nikogo nie zaskoczy, że tą granicą jest dokładnie $\langle \nu_x, id \rangle$, gdzie ν jest miarą Younga generowaną przez ten ciąg.

Zastosowania w PDE

Jednym z ważniejszych zastosowań miar Younga jest zastosowanie w RRCz. Czasami łatwiej jest rozwiązać nam jeden układ równań i z tak przygotowanymi rozwiązaniami zbiec do rozwiązań innego układu. Popatrzmy na to na przykładzie równań Eulera i równań Naviera-Stokesa.

Równania Eulera.

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Równania Naviera-Stokesa

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla p = \nu \Delta u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Słabe rozwiązania równań Eulera

Słabym rozwiązaniem równania Eulera zwykle nazywamy funkcję u spełniająca następujące 3 warunki

- Tożsamość całkowa:

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \partial_t \phi(x,t) \cdot u(x,t) + \nabla \phi(x,t) : (u \otimes u)(x,t) dx dt = \int_{\mathbb{T}^d} u(x,\tau) \cdot \phi(x,\tau) - u_0(x) \cdot \phi(x,0) dx \quad (3)$$

- Brak dywergencji:

$$\int_{\mathbb{T}^d} u(x,\tau) \cdot \nabla \psi(x) dx = 0 \quad (4)$$

- Globalne ograniczenie:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} |u(x,\tau)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} |u_0(x)|^2 dx \quad (5)$$

Ze względu na pojawienie się w granicy miar Younga generowanych przez ciąg rozwiązań równań Naviera–Stokesa, definiuje się jeszcze słabszą klasę rozwiązań niż słabe rozwiązania.

Miarowe rozwiązanie. Rozwiązaniem miarowym równań Eulera nazwiemy trójkę (ν, m, D), gdzie ν jest pewną miarą Younga, m miarą o wartościach w macierzach, która rozkłada się na iloczyn tensorowy $m_t \otimes dt$, gdzie m_t są jednostajnie ograniczone, a D jest dodatnią i ograniczoną funkcją w czasie. Cała ta trojka spełnia również podobne warunki jak słabe rozwiązania równań Eulera.

Jednoznaczność dla miarowych rozwiązań

Duża przewagą miarowych rozwiązań jest następujące twierdzenie

Weak-strong uniqueness. Jeżeli istnieje mocne ($U \in C^1$) i miarowe (trójka (ν, m, D)) rozwiązanie równań Eulera to są one sobie równe, tzn. $\nu_{x,t} = \delta_{U(x,t)}$, $m = 0$, $D = 0$.