Niewymierność $\zeta(3)$ – zarys dowodu Fritsa Beukersa.

Jan Kostrzon

kwiecień 2020

$$A = \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$
$$= 1{,}20205\ 69031\ 59594\ 28539\ 97381\ 61511\ 44999\ 07649\ 86292\ \ldots$$
$$= [1, 4, 1, 18, 1, 1, 1, 4, 1, \ldots]$$

Streszczenie idei dowodu:

Wstęp

Streszczenie idei dowodu:

- Znalezienie ciągu (I_n) takiego że

$$I_n = A_n\zeta(3) + W_n, \text{ gdzie } A_n \in \mathbb{Z} \text{ i } W_n \in \mathbb{Q}.$$

Jednocześnie, I_n będzie posiadał wygodne własności analityczne i algebraiczne (F. Beukers, D. Huylebrouck).

Streszczenie idei dowodu:

- Znalezienie ciągu (I_n) takiego że

$$I_n = A_n \zeta(3) + W_n, \text{ gdzie } A_n \in \mathbb{Z} \text{ i } W_n \in \mathbb{Q}.$$

  Jednocześnie, I_n będzie posiadał wygodne własności analityczne i algebraiczne (F. Beukers, D. Huylebrouck).
- Jeśli $\zeta(3) \in \mathbb{Q}$, to $I_n \in \mathbb{Q}$.

Streszczenie idei dowodu:

- Znalezienie ciągu (I_n) takiego że
$$I_n = A_n\zeta(3) + W_n,\ \text{gdzie } A_n \in \mathbb{Z} \ \text{ i } W_n \in \mathbb{Q}.$$
Jednocześnie, I_n będzie posiadał wygodne własności analityczne i algebraiczne (F. Beukers, D. Huylebrouck).
- Jeśli $\zeta(3) \in \mathbb{Q}$, to $I_n \in \mathbb{Q}$.
- Znalezienie ciągu liczb naturalnych d_n takiego że, $d_n I_n \in \mathbb{Z}^*$ i $d_n I_n \to 0$.

Całki Beukersa

- Dla $n \in \mathbb{N}$, **przeskalowany** n**-ty wielomian Legendre'a**:

$$P_n(x) := \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n(1-x)^n\right).$$

- Dla $n \in \mathbb{N}$, **przeskalowany n-ty wielomian Legendre'a**:

$$P_n(x) := \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,\left(x^n(1-x)^n\right).$$

- Dla $K := (0;1) \times (0;1)$ i $S := (0;1) \times (0;1) \times (0;1)$

$$(\star) = \int_S \frac{1}{1-(1-xy)z}\,d\lambda_3(x,y,z) = \int_K \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\,d\lambda_2(x,y) = 2\zeta(3).$$

- Dla $n \in \mathbb{N}$, **przeskalowany** n**-ty wielomian Legendre'a**:

$$P_n(x) := \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^n(1-x)^n).$$

- Dla $K := (0;1) \times (0;1)$ i $S := (0;1) \times (0;1) \times (0;1)$

$$(\star) = \int_S \frac{1}{1-(1-xy)z}\, d\lambda_3(x,y,z) = \int_K \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, d\lambda_2(x,y) = 2\zeta(3).$$

- n**-ta całka Beukersa**:

$$I_n := \int_K \frac{-P_n(x)P_n(y)\ln(xy)}{1-xy}\, d\lambda_2(x,y).$$

- I_n jest kombinacją liniową o współczynnikach całkowitych całek postaci

$$\int_K \frac{-x^a y^b \ln(xy)}{1-xy}\, d\lambda_2(x,y), \qquad a,b \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leqslant a,b \leqslant n.$$

[1] Petros Hadjicostas *Some Generalizations of Beukers' Integrals*, Kyungpook Mathematical Journal 2002; 42(2): 399–416

Wartości całek Beukersa

- I_n jest kombinacją liniową o współczynnikach całkowitych całek postaci

$$\int_K \frac{-x^a y^b \ln(xy)}{1-xy}\, d\lambda_2(x,y), \qquad a,b \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leqslant a,b \leqslant n.$$

- Wszystkie wartości tych całek są postaci[1]

$$A\zeta(3) + \frac{B}{C}, \text{ gdzie } A,B,C \in \mathbb{Z} \text{ i } C \mid [NWW(2,3,\dots,n)]^3.$$

[1] Petros Hadjicostas *Some Generalizations of Beukers' Integrals*, Kyungpook Mathematical Journal 2002; 42(2): 399–416

Wartości całek Beukersa

- I_n jest kombinacją liniową o współczynnikach całkowitych całek postaci

$$\int_K \frac{-x^a y^b \ln(xy)}{1-xy}\, d\lambda_2(x,y), \qquad a,b \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leqslant a,b \leqslant n.$$

- Wszystkie wartości tych całek są postaci[1]

$$A\zeta(3) + \frac{B}{C}, \text{ gdzie } A,B,C \in \mathbb{Z} \text{ i } C \mid [NWW(2,3,\ldots,n)]^3.$$

- Zatem,

$$I_n = A_n\zeta(3) + \frac{B_n}{C_n}, \text{ gdzie } A_n,B_n,C_n \in \mathbb{Z} \text{ i } C_n \mid [NWW(2,3,\ldots,n)]^3.$$

[1] Petros Hadjicostas *Some Generalizations of Beukers' Integrals*, Kyungpook Mathematical Journal 2002; 42(2): 399–416

Założenie nie wprost

- Definiujemy $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$d_n = [NWW(2, 3, ..., n)]^3.$$

Założenie nie wprost

- Definiujemy $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$d_n = [NWW(2,3,...,n)]^3.$$

- Załóżmy że $\zeta(3)\in\mathbb{Q}$, wtedy $\zeta(3)=\frac{M}{N}$ dla pewnych $M,N\in\mathbb{Z}$ i dla $n\geqslant N$

$$d_n\left|I_n\right| = \left|d_n\frac{A_nM}{N} + d_n\frac{B_n}{C_n},\right| \in\mathbb{Z}.$$

co wynika z tego, że $C_n, N \mid [NWW(2,3,...,n)]^3$.

Przekształcenie I_n

- Zachodzi równość[2]

$$|I_n| = \int_S \left(\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z} \right)^n \frac{1}{1-(1-xy)z} \, d\lambda_3(x,y,z).$$

[2] Dirk Huylebrouck (2001) *Similarities in Irrationality Proofs for π, $\ln 2$, $\zeta(2)$, and $\zeta(3)$*, The American Mathematical Monthly, 108:3, 222–231

Przekształcenie I_n

- Zachodzi równość[2]

$$|I_n| = \int_S \left(\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z} \right)^n \frac{1}{1-(1-xy)z} \, d\lambda_3(x,y,z).$$

- $I_n \neq 0$.

[2] Dirk Huylebrouck (2001) *Similarities in Irrationality Proofs for π, $\ln 2$, $\zeta(2)$, and $\zeta(3)$*, The American Mathematical Monthly, 108:3, 222–231

Przekształcenie I_n

- Zachodzi równość[2]

$$|I_n| = \int_S \left(\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z} \right)^n \frac{1}{1-(1-xy)z} \, d\lambda_3(x,y,z).$$

- $I_n \neq 0$.
- Jeżeli $A = \sup_S \left[\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z} \right]$, to $|I_n| < A^n(\star) = A^n(2\zeta(3))$. Przypomnijmy,

$$(\star) = \int_S \frac{1}{1-(1-xy)z} \, d\lambda_3(x,y,z) = 2\zeta(3).$$

[2] Dirk Huylebrouck (2001) *Similarities in Irrationality Proofs for* π*,* $\ln 2$*,* $\zeta(2)$*, and* $\zeta(3)$, The American Mathematical Monthly, 108:3, 222-231

Końcowe oszacowania.

Mamy następujące szacowania.

[3] Rosser, J. Barkley; Schoenfeld, Lowell. *Approximate formulas for some functions of prime numbers.* Illinois J. Math. 6 (1962), no. 1, 64–94. Strona 71, Twierdzenie 12

Końcowe oszacowania.

Mamy następujące szacowania.

- Nietrywialna nierówność[3]:

$$NWW(2, 3, ..., n) < 3^n.$$

[3] Rosser, J. Barkley; Schoenfeld, Lowell. *Approximate formulas for some functions of prime numbers.* Illinois J. Math. 6 (1962), no. 1, 64–94. Strona 71, Twierdzenie 12

Końcowe oszacowania.

Mamy następujące szacowania.

- Nietrywialna nierówność[3]:

$$NWW(2,3,\dots,n) < 3^n.$$

- $\sup_S \left[\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z}\right] = (\sqrt{2}-1)^4.$

[3] Rosser, J. Barkley; Schoenfeld, Lowell. *Approximate formulas for some functions of prime numbers.* Illinois J. Math. 6 (1962), no. 1, 64–94. Strona 71, Twierdzenie 12

Końcowe oszacowania.

Mamy następujące szacowania.

- Nietrywialna nierówność[3]:

$$NWW(2, 3, ..., n) < 3^n.$$

- $\sup_S \left[\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z} \right] = (\sqrt{2}-1)^4.$

Ostatecznie

$$0 < d_n|I_n| < d_n(\sqrt{2}-1)^{4n}(2\zeta(3)) <$$

$$< 3^{3n}(\sqrt{2}-1)^{4n}(2\zeta(3)) < (0,9)^n(2\zeta(3)) \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$

czego chcieliśmy dowieść.

[3] Rosser, J. Barkley; Schoenfeld, Lowell. *Approximate formulas for some functions of prime numbers.* Illinois J. Math. 6 (1962), no. 1, 64–94. Strona 71, Twierdzenie 12

Koniec